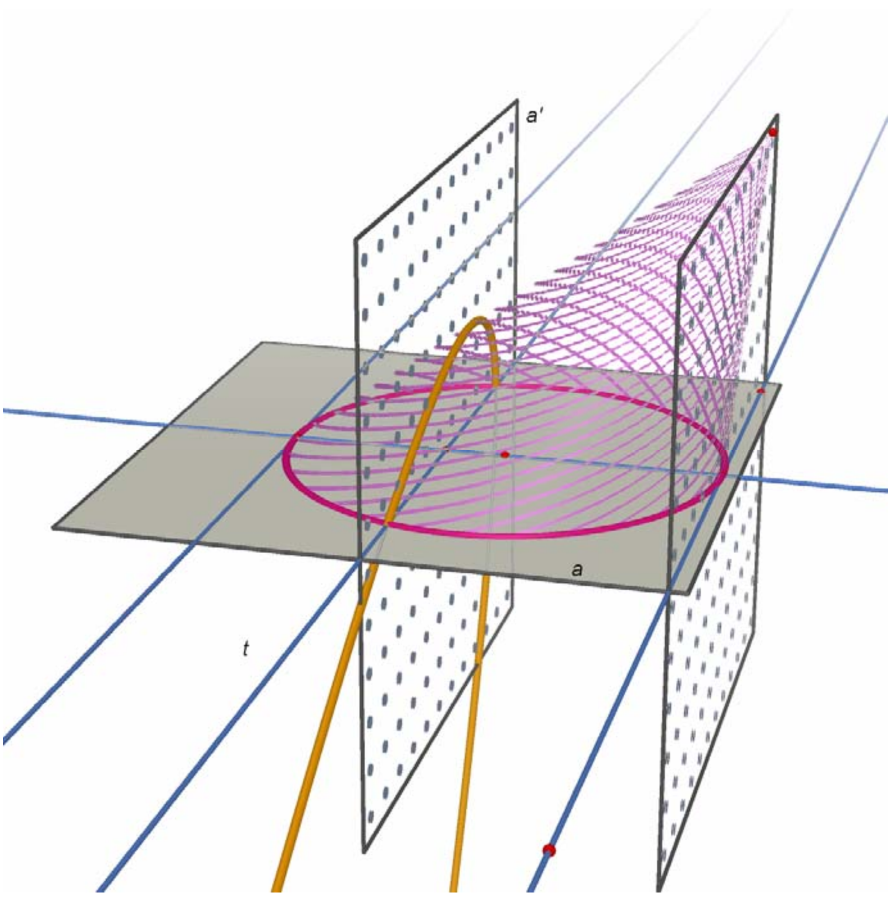
Geometria euclidea, affine e proiettiva, a.a. 2008/09
27 ottobre 2007

Osservazioni sul Compito a casa n. 2.

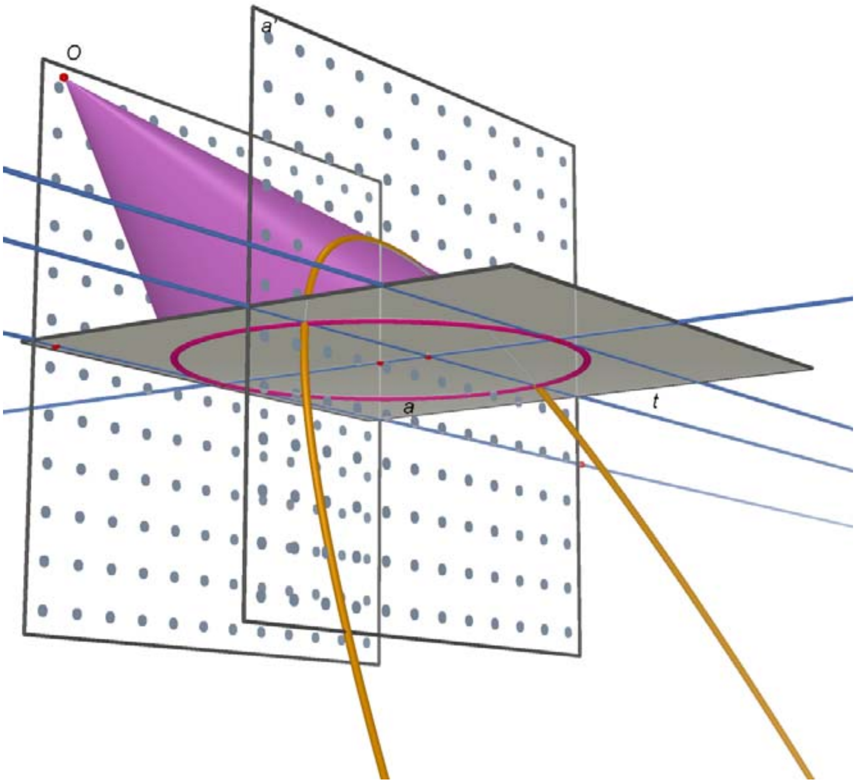
Nello spazio, sono dati due piani α e α', che si incontrano in una retta t, ed una circonferenza $C \subset \alpha$. Come bisogna scegliere il centro di proiezione O, fuori di α e α', in modo che la proiezione di C da O su α' sia una parabola?

La proiezione che dobbiamo costruire deve mandare la circonferenza *C*, che non possiede punti all'infinito, in una conica che possiede un punto all'infinito, anzi è tangente alla retta all'infinito del suo piano.
L'operazione di proiezione conserva le intersezioni tra rette e curve, quindi le tangenti alla curva immagine sono proiezione di rette tangenti alla *C*: è necessario, perciò, che la retta impropria del piano α' sia la proiezione di una retta tangente alla *C*; quale, tra le infinite tangenti a *C*?
Studiando le proprietà della proiezione di un piano α su un piano α', si è notato che la retta di α (detta anche "retta limite") che ha come immagine la retta impropria di α' è parallela a $t = \alpha \cap \alpha'$; poiché ci sono due tangenti a *C* con la direzione di *t*, dobbiamo sceglierne una, tra le due: questa sarà la retta limite. E' allora determinato il piano che passa per questa retta ed è parallelo al piano α'. Qualunque punto di questo piano può essere preso come centro di proiezione *O*.

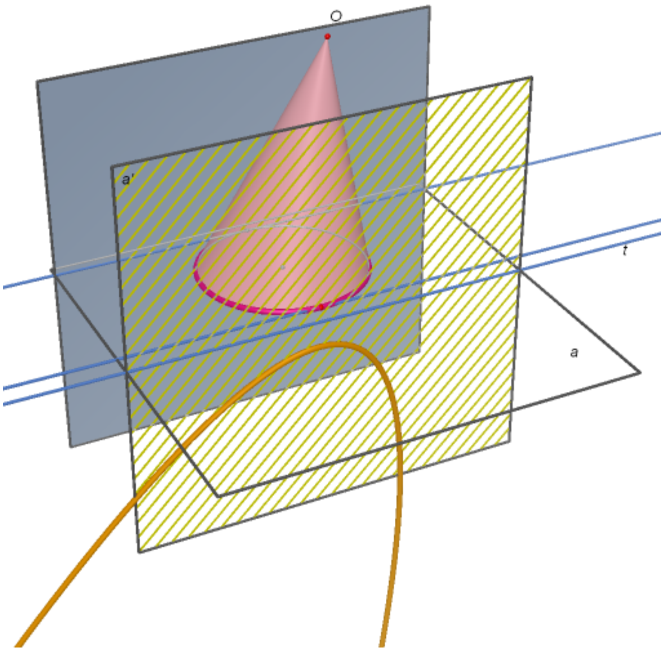
Nella figure che seguono, tracciate con l'aiuto del software Cabri3D, i piani sono indicati con lettere latine a, a'. Nella prima figura si considera il caso in cui la circonferenza *C* intersechi la retta *t*. Si è tracciato il diametro di *C* perpendicolare a *t*, per determinare più facilmente le due tangenti parallele a *t*; condotto il piano parallelo ad a' per una delle due, si è scelto un punto a piacere su questo piano come vertice del cono (tratteggiato) che passa per *C*.



Nella figura successiva è cambiato il punto di vista dell'osservatore; la superficie del cono è resa opaca, per distinguerla meglio.



L'ultima figura considera un caso in cui la circonferenza non intersechi la retta *t*. La costruzione non varia; per comodità di lettura del disegno, il piano a' è stato disegnato a righe, il piano a è reso trasparente.



Geometria euclidea, affine e proiettiva, a.a. 2008/09
27 ottobre 2007