Sulle lezioni n. 19-20 (25-27 novembre 2008).

Gli argomenti di queste lezioni sono trattati in [Testo] in 4.5 e nell'inizio di 4.6 (prop. 4.6.1), con numerosi riferimenti al capitolo 3, e in 4.7.
Per ovviare agli inconvenienti causati dai rinvii a capitoli che non sono stati studiati, includiamo degli appunti sulla classificazione delle proiettività piane, l'omologia, e soprattutto le sue applicazioni alla prospettiva.
Riportiamo anche l'enunciato corretto della classificazione delle isometrie, in quanto il paragrafo 4.7 (di cui si raccomanda lo studio) contiene un errore nel teorema 4.7.6 (di Chasles).

Classificazione delle proiettività piane reali. Omologia piana.

Come nel caso delle proiettività di $\mathbb{P}^1$, la classificazione delle proiettività di $\mathbb{P}^2$ su se stesso è basata sullo studio dei punti uniti.

Osservazione: ***se una proiettività*** **φ: $\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$*, tiene uniti due punti distinti P, Q, allora*** **φ** ***tiene unita la retta r_{PQ}.***
Infatti: poiché ogni proiettività manda rette in rette, $\varphi(r_{PQ}) = r_{\varphi(P)\varphi(Q)}$; da $\varphi(P) = P$, $\varphi(Q) = Q$ segue: $\varphi(r) = r$.

Ricordiamo: se φ ha equazione

$$\rho\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}\,,$$

la proiettività duale φ^* è data da

$$\rho\mathbf{U}' = \mathbf{A}^{-1\mathbf{T}}\mathbf{U}\,.$$

Le rette che vengono trasformate da φ su stesse sono gli elementi uniti di φ^*. Poiché un elemento unito per un'applicazione è unito anche per l'applicazione inversa, le rette unite per φ possono essere determinate come gli elementi uniti di φ^{*-1}, che è la proiettività **associata alla matrice $\mathbf{A}^\mathbf{T}$.**

Lemma: ***le matrici*** **A** ***e*** **$\mathbf{A}^\mathbf{T}$** ***hanno gli stessi autovalori.***
Dimostrazione. Ci limitiamo al caso di matrici del terzo ordine. Si verifica facilmente che in questo caso è

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + \lambda^2 tr(\mathbf{A}) - \lambda(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{A}_{ii}) + \det\mathbf{A}$$

Poiché

$$tr(\mathbf{A}^\mathbf{T}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}),\ \mathbf{A}_{\mathrm{ii}} = \mathbf{A}^\mathbf{T}{}_{\mathrm{ii}},\ \det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^\mathbf{T},$$

ne segue:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}^\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}).$$

C.v.d.

La tabella riassume la classificazione **delle proiettività piane reali, in base al numero** dei punti uniti e, conseguentemente, delle rette unite.

Autovalori	**Molteplicità algebrica**	**Molteplicità geometrica**	**Forma canonica**	**Punti uniti**	**Rette unite**
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$ tutti reali	**1,** per ogni autovalore	**1,** per ogni autovalore	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$	**Tre** distinti, non allineati	**Tre** distinte, non di un fascio
λ_1 reale, λ_2 e λ_3 complessi coniugati	**1**	**1**	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & h\cos\theta & \pm h\sin\theta \\ 0 & h\sin\theta & \mp h\cos\theta \end{pmatrix}$	**Uno** solo	**Una** sola, su cui una proiettività ellittica
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\mu \neq \lambda_1$	**2** per λ **1** per μ	**1** per ogni autovalore	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$	**Due** distinti	**Due** distinte
		2 per λ **1** per μ **omologia**	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$	**Infiniti** su **asse** **il centro** fuori dell'asse	**Infinite** per il centro, l'**asse,** non per il centro
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$	**3**	**1**	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	**Uno** solo	**Una sola**
		2 **omologia speciale**	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	**Infiniti** punti sull'**asse**	**Infinite** rette di un fascio, per il **centro dell'omologia** che sta sull'asse
		3 **identità**	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	**tutti**	**tutte**

Un'omologia piana è una proiettività, diversa dall'identità, in cui sono uniti tutti i punti di una retta (asse) e tutte le rette di un fascio (centro); se il centro del fascio appartiene all'asse, l'omologia è detta **speciale.**
Ci occupiamo ora della **omologie piane non speciali.** Dal punto di vista algebrico, sono le collineazioni che hanno un autovalore doppio, con molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica. Le loro proprietà geometriche sono interessanti per le applicazioni alla prospettiva.
Per le omologie speciali valgono proprietà geometriche analoghe.

Lemma: sia ω: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una proiettività in cui sono uniti tutti i punti di una retta a (**asse**) ed un punto C fuori di essa (**centro**), allora:

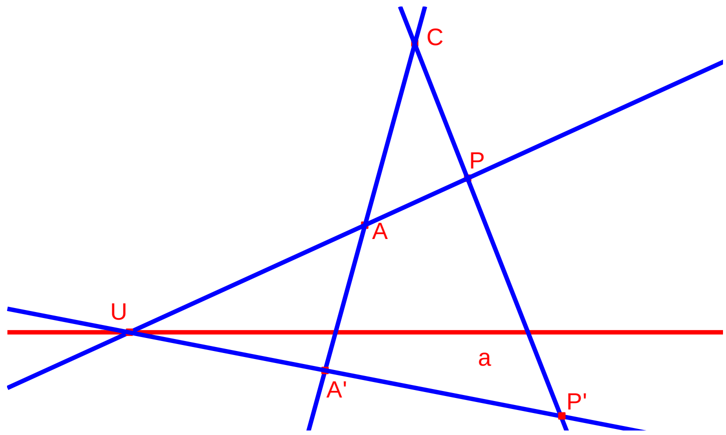
1. per ogni retta r passante per C, è $\omega(r) = r$
2. per ogni punto P diverso da C e fuori dell'asse, i punti C, P, $\omega(P)$ sono allineati,
3. per ogni retta s, che sia diversa da a e non passi per C, si ha che s e la retta corrispondente $\omega(s)$ si incontrano sull'asse.

Dimostrazione.
(1) Sia U il punto in cui r incontra l'asse a; possiamo quindi individuare r come il sottospazio generato dai due punti C, U . La sua immagine $\omega(r)$ è generata dai punti $\omega(C) = C$ ed $\omega(U) = U$, quindi coincide con r.
(2) Per ogni punto P diverso dal centro C e fuori dell'asse, la retta r dei due punti C, P è, per il ragionamento precedente, unita. Quindi $\omega(P)$ sta su r.
(3) Analogamente, una retta s, che non sia una retta unita, incontra l'asse in un punto W; la retta sua immagine $\omega(s)$ passa per $\omega(W)$, che coincide con W.

C.v.d.

Teorema: *un'omologia piana non speciale è completamente individuata se sono dati*
1. *il centro, l'asse ed una coppia di punti corrispondenti (allineati con il centro),* oppure
2. *il centro, l'asse ed una coppia di rette corrispondenti (che si incontrano sull'asse),* oppure
3. *l'asse a, due punti distinti A, B ed i loro corrispondenti* $\omega(A)$, $\omega(B)$, *in modo che la retta di A e B intersechi a nello stesso punto in cui lo interseca la retta di* $\omega(A)$, $\omega(B)$.

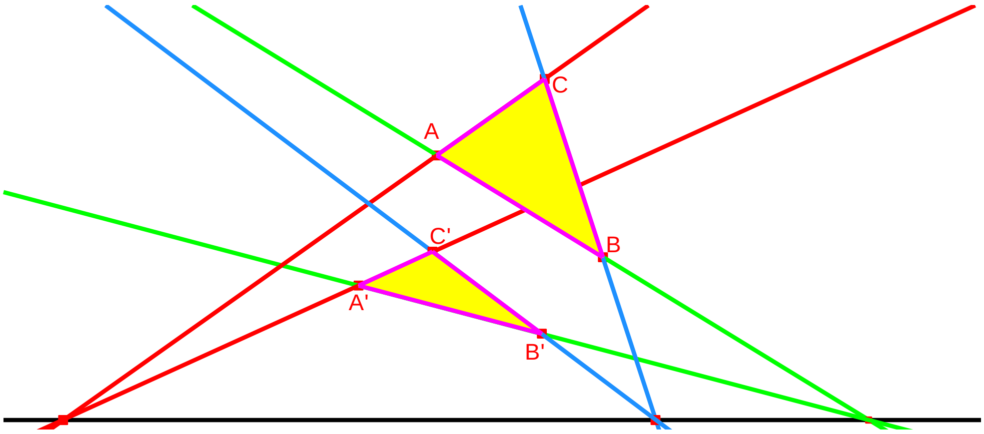
Dimostrazione.
1. Siano assegnati il centro C, l'asse a ed una coppia di punti A, $A'=\omega(A)$, allineati con C ed entrambi fuori di a. Preso un punto P qualsiasi, fuori ([1]) dalla retta congiungente C ed A, il suo corrispondente $P' = \omega(P)$ deve trovarsi sulla retta di C e P (per il punto 2 del lemma). Inoltre, detto U il punto in cui la retta AP incontra l'asse a, P' si trova sulla retta che passa per A' e per U (per il punto 3 del lemma); quindi P' è l'intersezione delle rette r_{CP} e $r_{A'U}$.



2. Analoga alla precedente.

3. Si può osservare che l'intersezione della retta di A e $A'=\omega(A)$, con la retta di B e $B'= \omega(B)$, è il centro dell'omologia, ma per costruire il corrispondente di un terzo punto C **non è necessario** ricorrere al centro dell'omologia: basta osservare che la retta r_{AC} , per A e per C, incontra sull'asse la sua corrispondente, passante per A'; e analogamente la retta r_{BC} incontra sull'asse la sua corrispondente, che passa per B'.
Il disegno che segue illustra la costruzione. Si noti che i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono prospettivi rispetto ad a (si ricordi il teorema di Desargues), dunque $r_{AA'}$, $r_{BB'}$, $r_{CC'}$ passano per uno stesso punto, centro dell'omologia.

[1] Se P stesse sulla retta di C ed A, ci si dovrebbe procurare un'altra coppia di punti corrispondenti, fuori della retta r_{CA} e poi ripetere il procedimento a partire da questa nuova coppia.



C.v.d.

NOTA. Esiste ancora un altro modo di determinare un'omologia: basta assegnare centro, asse e il valore (detto ***caratteristica*** *dell'omologia)* del birapporto della quaterna formata da un punto P, la sua immagine $\omega(P)$, il centro, ed il punto dell'asse allineato con i tre precedenti. Il lettore dimostri, per esercizio, che tale birapporto non dipende dalla scelta del punto P (non fisso).

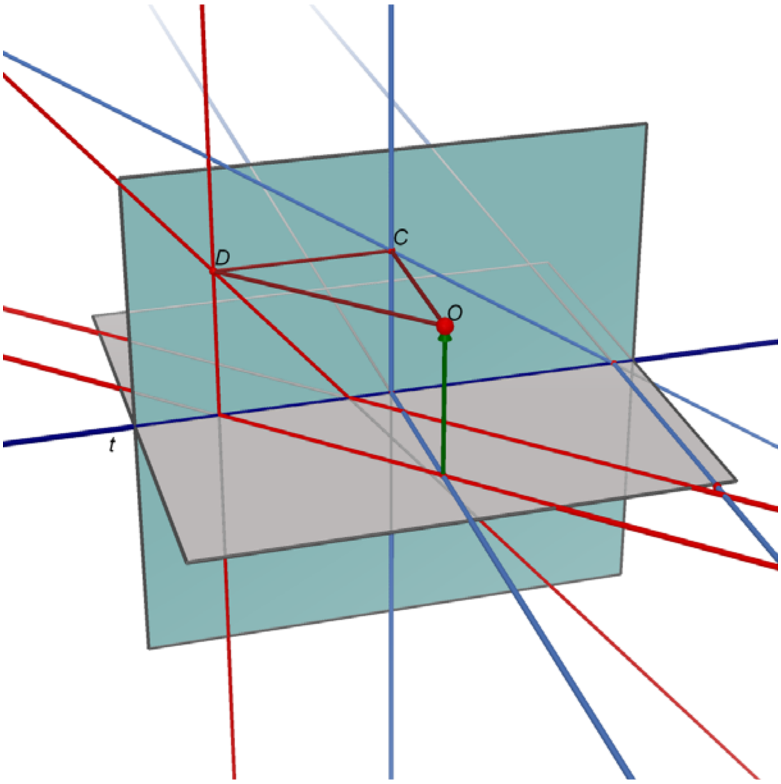
Sulla proprietà 3) è basata la tecnica insegnata da Piero della Francesca per disegnare sul quadro l'immagine di un pavimento.
Si immagina che il piano del pavimento e il piano del quadro si intersechino nella "linea di terra"; si fa ruotare il piano "reale" attorno alla linea di terra t, fino a farlo sovrapporre al quadro, in modo da poter considerare la corrispondenza tra i punti reali e punti dipinti come una proiettività di un piano su se stesso, in cui tutti i punti della retta t sono uniti, cioè una **omologia di asse** t .

Ricordiamo che la proiezione del pavimento sul quadro da un punto fuori dei due piani manda i punti all'infinito (le direzioni) delle rette del pavimento nei punti di una retta (la retta *limite*, o *orizzonte*) parallela a t.
Vediamo come i pittori utilizzino l'enunciato 3) per determinare l'omologia assegnando l'asse (la linea di terra t) e due coppie di punti corrispondenti, costituite da due punti della retta impropria del pavimento e dalle loro immagini, che sono sulla retta limite del quadro.

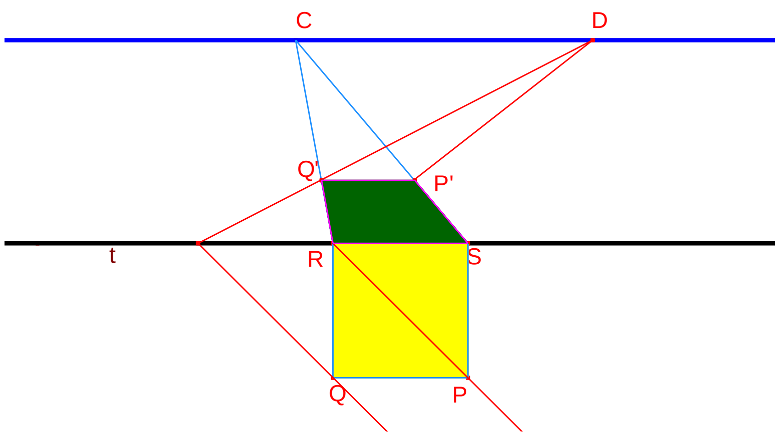
Dati l'occhio O dell'osservatore ed il quadro, sono determinati sul quadro due punti:

- il primo, C (punto *principale*, o punto *centrico*, o punto di fuga), è la proiezione sul quadro dell'occhio O. C è l'immagine del punto improprio della direzione perpendicolare a t; la sua distanza da t è l'altezza dell'osservatore.
- Il secondo punto, D (punto di *distanza*), sulla retta per C parallela a t, è tale che la misura del segmento CD sia uguale alla distanza dell'osservatore dal quadro. D è l'immagine di una direzione a 45° con t (quindi il triangolo OCD è rettangolo isoscele).

Nella figura, sono segnate nel piano orizzontale due rette (blu) perpendicolari a t e due rette (rosse) inclinate di 45° rispetto a t , e sul quadro le loro proiezioni da O.



Per costruire l'immagine *P'* di un qualsiasi punto *P* (del semipiano inferiore, ai fini del disegno) si usa l'enunciato 3 del teorema; in questo caso, i punti *A*, *B* assegnati sono due punti impropri (direzione ortogonale a *t* e direzione a 45°) e le loro immagini sono rispettivamente *C*, *D*. Basta quindi *mandare da P la retta perpendicolare a t e la retta inclinata a 45°, poi congiungere i punti in cui queste incontrano t rispettivamente con C e con D; l'intersezione delle due ultime rette è P'*.
Ecco come Piero della Francesca costruisce l'immagine del quadrato *PQRS* che ha il lato *RS* sulla linea di terra.



Sottogruppi del gruppo delle proiettività piane. Geometria affine, geometria euclidea.

Fissata una retta *r* nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$, si dimostra facilmente che le proiettività piane che applicano la retta *r* su se stessa (dette **affinità)** formano un gruppo $\mathcal{A}$, sottogruppo del gruppo proiettivo PGl(3,$\mathbb{R}$).

Per come sono state definite, le affinità conservano il parallelismo.

Scegliamo il sistema di riferimento in modo che la retta r abbia equazione $x_3 = 0$. In questo sistema di riferimento, una proiettività del gruppo $\mathcal{A}$ è associata ad una matrice **A** tale che, quando il vettore delle coordinate **X** ha la terza componente uguale a 0, il prodotto **AX** dia come risultato un vettore con la terza componente nulla. Cioè, si deve avere, **per qualunque scelta** di x_1, x_2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Deve essere quindi

$$a_{31} = a_{32} = 0.$$

Una matrice associata ad una proiettività del sottogruppo $\mathcal{A}$ è perciò una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

che verifica le condizioni

$$(1) \qquad a_{33} \neq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 .$$

Passando alle coordinate non omogenee

$$x = x_1/x_3,\ y = x_2/x_3$$

si ottiene, grazie alle condizioni (1), che le trasformazioni del sottogruppo $\mathcal{A}$ sono individuate dalle equazioni

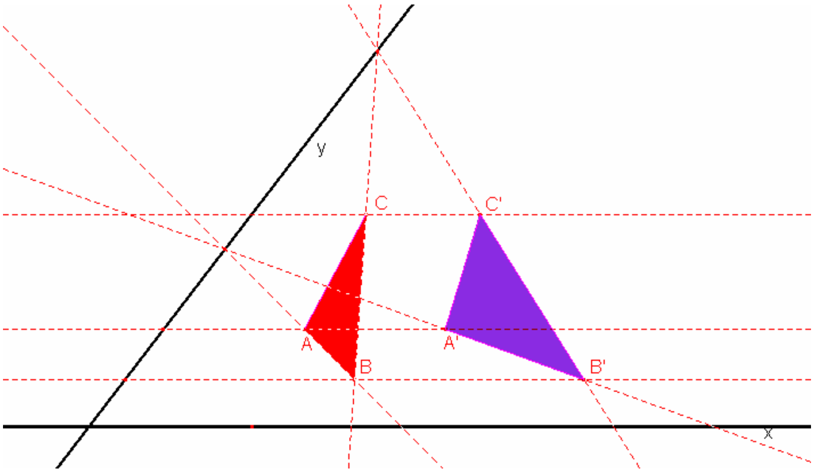
$$(2) \ \begin{cases} x = b_{11}x + b_{12}y + b_{13} \\ y = b_{21}x + b_{22}y + b_{23} \end{cases},\ \text{con } \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

Anche la trasformazione del piano affine $\mathbb{A}^2$ in se stesso, della forma (2), è detta ***affinità*** (come la proiettività piana che la determina).

Un esempio interessante di affinità è un'omologia che abbia il centro all'infinito, e l'asse al finito; questa affinità è detta "**affinità omologica**" o "**stiramento**". Scegliendo il riferimento in modo che l'asse dell'omologia sia la retta $x = 0$ ed il centro dell'omologia sia punto improprio dell'asse delle x, otteniamo le equazioni dell'affinità omologica

$$x' = \mathrm{h}\, x, \quad y' = y.$$

Se $\mathrm{h} = -1$, si ha una **simmetria** (generalmente, obliqua).
La figura che segue mostra un triangolo e la sua immagine nello stiramento con $\mathrm{h} = 2$.



Sottogruppi del gruppo delle affinità.

1. Le **similitudini.**

Se alla matrice $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ che compare nelle (2) si impone di soddisfare la condizione

$$(3) \qquad \mathbf{B}\,\mathbf{B}^T = k\mathbf{I}, \ k \neq 0,$$

si determina un **sottogruppo** del gruppo $\mathcal{A}$ delle affinità piane, e precisamente il sottogruppo delle **similitudini**.
Le similitudini per cui si ha *det***B** > 0 formano il sottogruppo delle **similitudini dirette.**
Si può definire la relazione di perpendicolarità tra rette utilizzando una particolare involuzione sulla retta impropria, esattamente l'involuzione ellittica che ha come punti uniti i **punti ciclici,** [1,±i,0]; **due rette sono perpendicolari se i loro punti impropri sono coniugati in questa involuzione,** di equazione

$$aa' + bb' = 0.$$

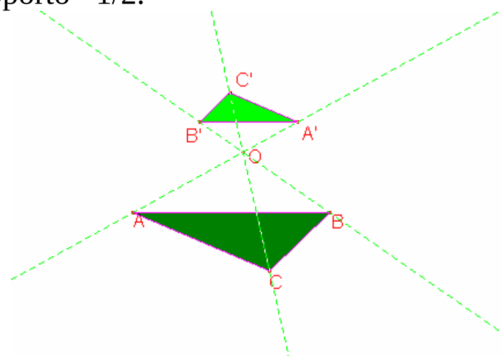
Le similitudini conservano la relazione di perpendicolarità.

2. **Le omotetie**.

Tra le similitudini, vi sono anche delle particolari omologie, con l'asse all'infinito e il centro al finito: le **omotetie.** In questo caso si ha che la matrice **B** di (3) è un multiplo della matrice identità**.**
Ponendo il centro dell'omotetia in (0,0) si hanno le equazioni canoniche:

$$(4) \quad x' = k\,x, \quad y' = k\,y.$$

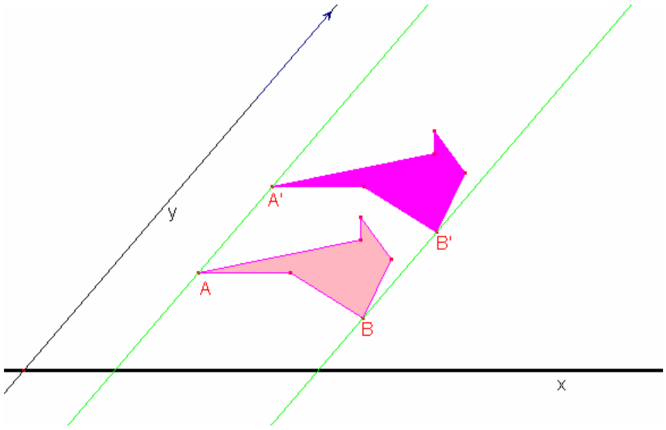
La costante k è detta ***rapporto di omotetia*****.** Il disegno che segue mostra due triangoli omotetici, in una omotetia di centro O e rapporto −1/2.



3. **Le traslazioni.**

Una traslazione è una similitudine che è un'omologia speciale, con asse e centro all'infinito. Ponendo il centro nel punto all'infinito dell'asse delle *y* si ottengono le equazioni

$$x' = x\,,\ \ y' = y + b\,.$$



4. **Le isometrie (congruenze, o trasformazioni euclidee).**

Se nella (3) si pone $k^2 = 1$, si selezionano le particolari similitudini rappresentate da equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta + a \\ y' = \mp x\sin\vartheta \pm y\cos\vartheta + b \end{cases}$$

che sono dette anche **congruenze**, oppure **trasformazioni euclidee,** oppure **isometrie**; l'ultimo nome indica che **queste trasformazioni conservano la distanza euclidea** (cioè, la misura dei segmenti). Esse formano un sottogruppo del gruppo delle similitudini.

Le isometrie la cui matrice associata ha il determinante uguale a 1 sono dette isometrie **dirette** (nei testi classici, **movimenti,** o **spostamenti**); esse formano un sottogruppo del gruppo delle isometrie.

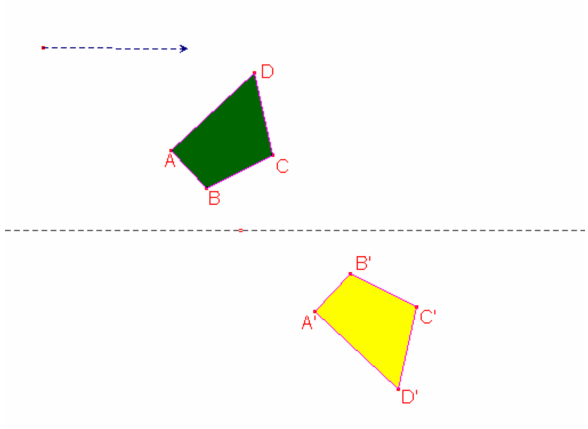
Le traslazioni sono particolari isometrie dirette; esse formano un sottogruppo, sia del gruppo delle affinità, che del gruppo delle similitudini, che di quello delle isometrie dirette (la matrice **B** della equazione (3) è in questo caso la matrice identità).

La classificazione delle isometrie piane è dovuta a Chasles (1831). La riportiamo senza dimostrazione (il lettore interessato può consultare [Testo],teorema 4.7.6, pag. 149, oppure E: Sernesi, Geometria I, n. 21, pag 260).

Le isometrie piane sono soltanto di quattro tipi:

1. ***rotazioni****, che sono isometrie dirette con un solo punto unito al finito,*
2. ***traslazioni*** *che sono isometrie dirette prive di punti uniti al finito (come visto sopra, omologie speciali con centro e asse all'infinito),*
3. ***riflessioni o simmetrie rispetto a rette,*** *in cui sono uniti tutti i punti dell'asse di riflessione: si tratta di omologie involutorie con il centro nella direzione ortogonale a quella dell'asse; non sono isometrie dirette*
4. ***glissoriflessioni,*** *o* ***antitraslazioni****, che sono isometrie non dirette, prive di punti uniti; si ottengono come prodotto di una riflessione per una traslazione nella direzione dell'asse di riflessione; come proiettività, hanno due soli punti uniti, entrambi all'infinito.*

La figura mostra un quadrilatero *ABCD* e il quadrilatero *A'B'C'D'* che ne è l'immagine in una antitraslazione



Esempi di proprietà proiettive, affini, metriche.

Secondo il "programma di Erlangen" di F. Klein ([Testo] § 4.7.7) una "geometria associata ad un gruppo" è lo studio delle proprietà, di un insieme e dei suoi sottoinsiemi, che sono invarianti per le trasformazioni del gruppo fissato.

Esempi di proprietà proiettive del piano (cioè, invarianti rispetto al gruppo $PGl(3,\mathbb{R})$) sono:

- per tre punti, essere allineati
- per tre rette distinte, appartenere ad uno stesso fascio
- per quattro punti allineati, il valore del loro birapporto
- per quattro rette di un fascio, il valore del loro birapporto
- per quattro punti, di determinare un quadrangolo.

Esempi di **proprietà affini** del piano - che non siano anche proiettive - sono:

- per tre punti, il valore del loro rapporto semplice
- per tre punti, che uno sia il punto medio tra gli altri due
- per due rette, di essere parallele
- per un quadrangolo, di essere un trapezio
- per un quadrangolo, di essere un parallelogramma.

Esempi di **proprietà simili** - che non siano anche proprietà affini - sono

- il rapporto tra due segmenti
- l'angolo di due rette
- per un parallelogramma, di essere un rettangolo.

Una **proprietà euclidea,** che non è invariante per similitudini, è la lunghezza di un segmento.