Geometria euclidea, affine e proiettiva
9 dicembre 2008

Esercitazione riassuntiva (facsimile di prova d'esame)

(Durante l'esame è permesso consultare il libro di testo oppure gli appunti del corso)

1. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono assegnati i punti

$$L = [1,0,2,1,0],\ M = [2,0,0,2,0],\ N = [3,0,2,3,0],\ P = [-1,0,0,1,1].$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio proiettivo S generato da L, M, N, P e scriverne delle equazioni parametriche e delle equazioni implicite (cartesiane).
(b) Scrivere delle equazioni cartesiane che individuino un sottospazio proiettivo complementare di S.

2. (a) Scrivere la proposizione duale della seguente:
"dati nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ due rette r, s sghembe tra loro ed un punto P, che non appartiene né a r né a s, se i due piani, che sono determinati da P e da ciascuna delle rette, si intersecano soltanto in P, allora P e il sottospazio $J(r,s)$, congiungente delle rette, sono complementari."
(b) Dimostrare o la proposizione precedente oppure la duale.

3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i fasci di rette Φ, con centro in $[0,0,1]$, e Φ', con centro in $[2,2,1]$. Siano:

a la retta di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$, b la retta $2x_1 + x_2 = 0$, c la retta $x_2 = 0$,
a' la retta $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$, b' la retta $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, c' la retta $-x_2 + 2x_3 = 0$.

Si scelgano dei sistemi di coordinate proiettive nei fasci Φ, Φ' e si rappresenti, in quelle coordinate, la proiettività $\alpha: \Phi \to \Phi'$ determinata dalle condizioni:

$\alpha(a) = a'$, $\alpha(b) = b'$, $\alpha(c) = c'$.

4. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i fasci di rette Φ, con centro in $A = [0,0,1]$, Φ', con centro in $B = [2,2,1]$, e la proiettività $\alpha: \Phi \to \Phi'$ che alla retta di equazione $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ fa corrispondere la retta di equazione $\lambda'(x_1 - 2x_3) + \mu'(x_2 - 2x_3) = 0$ tale che sia

$$\lambda'\mu + \lambda\mu' = 0.$$

Per ogni retta $r \in \Phi$, sia P il punto di intersezione di r con $\alpha(r)$.
a) Determinare un'equazione del luogo $\mathcal{C}$ descritto dal punto P al variare della retta r.
b) Studiare $\mathcal{C}$; verificare che $\mathcal{C}$ contiene i punti A, B e che, detta s la retta congiungente A, B, la retta $\alpha(s)$ è tangente a $\mathcal{C}$.
c) Studiare la curva affine di cui $\mathcal{C}$ è la chiusura proiettiva, determinandone il tipo, l'eventuale centro, gli eventuali asintoti.

5. (a) Determinare punti uniti e rette unite nella proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Studiare l'affinità che è la restrizione della precedente proiettività al sottoinsieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$, verificando, a conferma di quanto ottenuto in (a), che questa affinità tiene unite le rette di un fascio.
(c) Stabilire se l'affinità studiata in (b) sia una similitudine oppure un'isometria e verificare i risultati ottenuti considerando l'immagine del quadrangolo di vertici $(0,0)$, $(-1,-4)$, $(2,-4)$, $(3,0)$.

6. Dimostrare che, dati una conica Q non degenere ed un punto P che non le appartiene, se la polare di P interseca Q nei punti M, N, questi sono i punti di contatto delle tangenti condotte da P a Q.