

Geometria euclidea, affine e proiettiva

Prova scritta del 7 settembre 2009

Tempo a disposizione: 3 ore. Si possono consultare gli appunti e il libro di testo.

1. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ è assegnato il sottospazio S di equazioni

$$\begin{cases} x_2 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane di un sottospazio proiettivo T che sia complementare di S .

2. Enunciare e dimostrare la proposizione duale della seguente:

*nello spazio $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, se una retta ed un piano **non** sono in posizione generale, hanno almeno un punto in comune.*

3. Determinare il parametro h in modo che l'equazione bilineare

$$xx' + 4x + hx' - 6 = 0$$

rappresenti un'involuzione $\varphi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Trovare i punti uniti di φ ed il punto che ha come immagine ∞ .

4. Nel piano affine sono dati due triangoli ABC , $A'B'C'$, i cui lati sono a due a due paralleli; più precisamente, la retta r_{AB} è parallela alla retta $r_{A'B'}$, r_{BC} è parallela a $r_{B'C'}$ e r_{CA} è parallela a $r_{C'A'}$. Che cosa si può affermare, a proposito dei vertici dei due triangoli? Perché?

5. Studiare, determinandone i punti uniti e le rette unite, la proiettività α^* di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che induce sul piano affine (ottenuto scegliendo come retta impropria la retta di equazione $x_3 = 0$) l'affinità α di equazioni

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}.$$

Che nome si può dare ad α ? Confermare la risposta a questa domanda mostrando l'immagine $\alpha(\Delta)$ del triangolo Δ di vertici $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$.

6. Le equazioni che seguono rappresentano delle coniche nel piano affine:

$$\text{a) } x^2 - 4y^2 = 1 \quad \text{b) } y^2 - 2x = 0 \quad \text{c) } x^2 - y^2 = 0 \quad \text{d) } x^2 - 1 = 0.$$

Giustificare brevemente¹ le risposte alle seguenti domande:

- vi sono, tra le quattro coniche, alcune che siano affinemente equivalenti?
- Ve ne sono alcune che siano proiettivamente equivalenti?

¹ una risposta esatta che non sia accompagnata da spiegazioni **non** viene presa in considerazione.