Geometria lineare e affine (c. di l. in Fisica) **– Geometria analitica** (c. l. in Matematica)
Prova scritta – 11 luglio 2008

Per favore, leggere le avvertenze: la durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali; non è consentito ritirarsi o uscire prima che sia trascorsa un'ora e mezza dall'inizio della prova. Scrivere nome e cognome **<u>in testa ad ogni foglio</u>. Consegnare questo foglio.**

<u>Nome e cognome………………………………….. N. matr.……………. corso di laurea………</u>

1.A. Determinare per quali valori dei parametri h,k sia compatibile il sistema lineare, nelle incognite x,y,z

$$\begin{cases} x+3y+9z=3 \\ x+y+3(1+k)z=3+3h(1+k) \\ x+3z=3h \end{cases}.$$

B. Per quei valori di h,k per cui il sistema ammette infinite soluzioni, trovare le soluzioni.

C. Indichiamo con π il piano di equazione $x + 3y + 9z = 3$ e con $r(h,k)$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+y+3(1+k)z=3+3h(1+k) \\ x+3z=3h \end{cases}$. Utilizzare i risultati ottenuti in A) per rispondere alle domande:

(i) Esistono valori di h, k per cui il piano π e la retta $r(h,k)$ sono incidenti in un solo punto?
(ii) Esistono valori di h, k per cui il piano π e la retta $r(h,k)$ sono paralleli in senso stretto (cioè, non hanno punti in comune)?
(iii) Esistono valori di h, k per cui il piano π contiene la retta $r(h,k)$? In caso affermativo, quali sono i parametri direttori della retta?

(punti 2,5+1+3,5)

2. Si considerino i vettori di R^3

$$\mathbf{u} = (3,-3,3),\ \mathbf{v}(p) = (p,-3,10) \text{ (con } p \text{ numero reale)},\ \mathbf{w} = (-1,1,-\tfrac{1}{3}-3).$$

Determinare p in modo che i tre vettori siano linearmente dipendenti e, per quel valore di p, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

(punti 1+2)

3. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono dati i punti $A = (2,0,3)$, $B = (3,0,1)$, $C = (0,3,1)$.

(a) Rappresentare la retta dei punti A, B in forma parametrica e con equazioni cartesiane.
(b) Verificare che i punti A, B, C non sono allineati e scrivere un'equazione del piano che li contiene.
(c) Scrivere delle equazioni cartesiane per la retta che passa per C ed è parallela alla retta dei punti A, B.

(punti 2+2+1)

4. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono dati il punto $X = (0,-1,-3)$ ed il piano α di equazione $3x + y + 6z = 27$. Trovare le coordinate del punto X' che è la proiezione ortogonale di X su α.

(punti 3)

5. Chiamiamo S la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2+3x+6y-3z = 0$.

(a) Rappresentare in forma cartesiana la circonferenza C tagliata su S dal piano che passa per il centro di S ed è parallelo agli assi delle coordinate x e y.
(b) Trovare un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche del cilindro che passa per C ed ha generatrici parallele all'asse delle z.

(punti 2+3)

6. E' data nel piano una famiglia di coniche, le cui equazioni dipendono dal parametro reale k

$$k^2(x-k)^2+9(y-9k)^2=9k^2 \quad .$$

Per ciascuna delle affermazioni che seguono, spiegare brevemente <u>i motivi[1] per cui</u> è, o non è, corretta.

a) La famiglia contiene una sola conica degenere (o specializzata, riducibile) formata da due rette incidenti, distinte.
b) Le coniche non degeneri della famiglia sono tutte delle ellissi.
c) Gli assi coordinati coincidono con gli assi di simmetria di tutte le coniche non degeneri della famiglia.
d) Tra le coniche della famiglia vi è una sola circonferenza, di raggio uguale a 1 e centro (3,3).
e) I centri delle coniche della famiglia appartengono tutti ad una retta.

Facoltativo: trovare un'equazione del luogo dei centri delle coniche della famiglia.

(punti 7++)

[1] la risposta "vero" o "falso" priva di motivazioni è valutata 0 punti, anche se esatta.