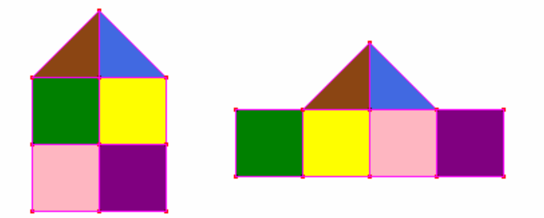
NOTA. Con [testo] indicheremo sempre il libro
S. Abeasis, *Geometria analitica del piano e dello spazio*, Zanichelli, 2002.

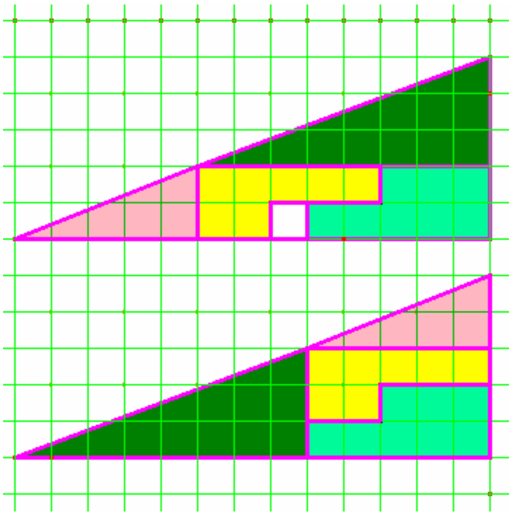
Per svolgere gli esercizi che seguono è necessario conoscere gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 1.

0. Esercizi sui prerequisiti di geometria del piano e dello spazio

1. Che cosa significa la frase: "le rette *r, s* sono parallele"?
2. Possono esserci, nello spazio, due rette che **non** hanno punti in comune e **non** sono parallele?
3. Che cosa significa la frase: "le rette incidenti *a, b* sono ortogonali (perpendicolari)"?
4. In un piano, consideriamo due rette incidenti *r, s* e due rette *r', s',* con *r'* parallela a *r, s'* parallela a *s*. C'è qualche relazione tra gli angoli formati da *r* ed *s* e quelli formati da *r'* e *s'* ? **Motivare** ogni affermazione!
5. In un piano, consideriamo due rette parallele *r,s.* Prendiamo poi una retta *t* che è parallela a *s;* può accadere che *t* intersechi *r?* Perché? Siano *h,k,* due rette che intersecano *r.* E' possibile che *h* (oppure *k*) sia parallela ad *s* o a *t*? Le rette *r,s,t* intercettano su *h,k* dei segmenti; conosci un teorema che riguarda questi segmenti? Sai enunciarlo?
6. Considera questa affermazione: *due figure piane che, come quelle nell'illustrazione qui sotto, possono essere decomposte in pezzi a due a due uguali tra loro, hanno aree uguali.*



Se l'osservazione precedente è vera, allora nel disegno qui sotto la figura più in basso ha area minore di quella in alto; o no? Dove è finito il quadratino bianco?



7. In un piano α, consideriamo due rette incidenti *r, s*. Prendiamo un punto *A* fuori di α. Quante sono le rette che passano per *A* e sono parallele a *r*? Chiamiamo *r' s'* le rette passanti per *A* che sono rispettivamente parallele a *r* e ad *s*. Che relazione c'è tra il piano α e il piano individuato da *r', s'* ? C'è qualche relazione tra gli angoli formati da *r* ed *s* e quelli formati da *r'* e *s'*? **Motivare** ogni affermazione!

8. Usando l'esercizio 7, giustificare la definizione (in [testo], pag. 9): "se le rette orientate *r* ed *s* sono sghembe, si assume come angolo [tra *r,s*] quello individuato dalle rette *r', s'* parallele ad *r* ed *s* ed equiorientate, condotte da un punto qualunque dello spazio."
9. Consideriamo un punto *P* ed una retta *r* che lo contiene. Quante sono le rette dello spazio che passano per *P* e sono perpendicolari a *r* ?
10. Che significa la frase "la retta *r* è perpendicolare al piano π"?

1. Vettori geometrici.

1. Disegnare un triangolo scaleno *AOB*. Considerare i vettori **a** = $\overrightarrow{OA}$, **b** = $\overrightarrow{OB}$. Disegnare i vettori: **b + a, b – a, (b – a) + a,** 2**a** – 3**b,** (–1/3)**(a + b).** Esaminare le differenze tra i casi in cui l'angolo di vertice *O* è acuto e quelli in cui è ottuso.

2. Sono dati tre punti non allineati *A,B,C*. Sia *D* un punto tale che il quadrilatero *ABCD* sia un parallelogrammo. Per ciascuno dei vettori $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}$, stabilire se è in qualche relazione (di equipollenza, di equipollenza con la somma, eccetera...) con i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

3. In un piano, è dato un quadrilatero *ABCD.* Chiamiamo **u** il vettore applicato in *A* equipollente a $\overrightarrow{BC}$, **v** il vettore applicato in *A* equipollente a $\overrightarrow{CD}$, **w** il vettore applicato in *A* equipollente a $\overrightarrow{DA}$. Calcolare la somma $\overrightarrow{AB}+$ **u** + **v** + **w** .

4. I punti *C,A,B* sono vertici consecutivi di un parallelogramma per il quale vale l'uguaglianza $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$: di che tipo di parallelogrammo si tratta? (Suggerimento: ricordare le relazioni tra gli angoli di in un parallelogrammo.)

5. *ABCD* è un quadrato, e *O* è il suo centro (punto d'incontro delle diagonali). Scrivere il vettore $\overrightarrow{AO}$ come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

6. *HKL* è un triangolo, *G* il suo baricentro, cioè il punto comune alle sue mediane. Esprimere il vettore $\overrightarrow{HG}$ come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HL}$. (Suggerimenti: il baricentro divide ogni mediana in segmenti che sono..............quindi mandando dal baricentro la parallela ad un lato si dividono gli altri lati in parti che .....)

7. Dati tre punti distinti e non allineati *O, A, B*, chiamiamo *M* il punto medio tra *A* e *B*. Esprimere il vettore $\overrightarrow{OM}$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Considerare il caso in cui *O, A, B* sono allineati: cambia il modo di scrivere $\overrightarrow{OM}$?

8. Nel piano, riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali *Oxy*, si consideri il vettore **c** = (2, –3).
   a) Disegnare i vettori (1/2) **c**, (–3/4) **c** e scriverne le componenti.
   b) Sia **d** = (1,–3/2). Scrivere il vettore **0** come combinazione lineare dei vettori **c, d** in **due** modi <u>diversi</u>.

9. Nel piano, riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche *Oxy,* sono dati i punti *A* di coordinate (2,–4), *B* di coordinate (–1, 3), *C* di coordinate (1/2, 0). Trovare le componenti dei vettori applicati in *O* che sono equipollenti rispettivamente ai vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. Stabilire, senza ulteriori calcoli, se i punti *A,B,C* sono allineati.

10. In $\mathbb{R}^2$ sono assegnati il vettore **k** = (–3, 2) ed il punto *A* = (2,–4). Determinare i punti *K, L* tali che il vettore $\overrightarrow{AK}$ sia equipollente a **k,** il vettore $\overrightarrow{LA}$ sia equipollente a 2**k.**

11. Nello spazio, è assegnato un sistema di coordinate cartesiane. Siano **i, j, k** i vettori di modulo unitario (versori) applicati nell'origine, con la direzione e verso degli assi del sistema cartesiano. E' possibile scrivere uno, tra **i, j, k,** come combinazione lineare degli altri due? Motivare la risposta! Descrivere gli insiemi dei vettori che sono combinazione lineare soltanto di *due* tra **i, j, k.** E quali sono i vettori che sono combinazione lineare soltanto di *uno* tra **i, j, k** ?

12. E' vero o falso che se tre vettori giacciono in uno stesso piano allora **ciascuno** di essi si può ottenere come combinazione lineare degli altri due? Spiegare la propria risposta.

2. Prodotto scalare e prodotto vettoriale.

1. In $\mathbb{R}^2$ è dato il vettore **h** = (4,–3). Determinare
   (a) il modulo di **h** ed i coseni degli angoli che **h** forma con i versori fondamentali **i,j**
   (b) le componenti di tutti i vettori che sono linearmente dipendenti da **h**
   (c) le componenti di tutti i vettori che sono perpendicolari a **h.**

2. Determinare le componenti di tutti i vettori perpendicolari al vettore **w** = 2 **i** $-$ 3 **j**; verificare che esistono due versori perpendicolari a **w** e scriverne le coordinate**;** disegnare **w** e i due versori perpendicolari ad esso su un foglio di carta quadrettata.

3. Calcolare il prodotto scalare **u•v** ed |**u∧v**| in ciascuno dei seguenti casi:
   a. **u, v** sono versori che formano un angolo di 30°
   b. **u = –v**
   c. **i,j,k** sono i versori fondamentali in $\mathbb{R}^3$, **u = i + k, v = i – k.**

4. Sia **a** un vettore fissato (applicato nell'origine) nel piano. Descrivere l'insieme di tutti i vettori **v** del piano (applicati nell'origine) per cui **a•v** = 0.

5. Sia **a** un vettore fissato (applicato nell'origine) nello spazio. Descrivere:
   a. l'insieme di tutti i vettori **v** (applicati nell'origine) per cui **a•v** = 0;
   b. l'insieme di tutti i vettori **v** (applicati nell'origine) per cui **a** ∧ **v** = **0**.

6. *ABC* è un triangolo equilatero di lato *l*. Calcolare $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$. Qual è la componente di $\overrightarrow{AB}$ secondo la retta orientata *CA* ?

7. Sono dati due vettori **a, b**, che soddisfano le seguenti condizioni: $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}, |\mathbf{b}| = 1, \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$. Calcolare il modulo del vettore 3 **a** – 2 **b**.

8. Nel piano sono assegnati i punti *P* = (1,2), *Q* = (–1,3), *R* = (2,2), *S* = (4,1). Stabilire se il quadrilatero *PQRS* è un parallelogrammo; in caso affermativo, se sia un rombo.

9. Che proprietà hanno tre vettori **a, b, c** se il loro "prodotto misto" **a•b∧c** è uguale a zero?

10. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    a. Scrivere i vettori **u + v, –w, u + (-w)** = **u – w**.
    b. Trovare il vettore che si ottiene facendo la combinazione lineare di **u, v** con coefficienti 2, -1
    c. Trovare il vettore che è la combinazione lineare di **u, v, w** con i coefficienti -3, 1, 4.
    d. Scrivere le componenti di tutti i vettori del sottospazio generato da **v, w.**
    e. Stabilire se **u,v,w** sono linearmente dipendenti.
    f. Calcolare |**u**|**,** il coseno dell'angolo tra **w** e **v**, le componenti di **u∧w**
    g. Trovare le componenti dei due versori paralleli a **u.**
    h. Determinare i vettori che sono le proiezioni ortogonali di **u** su **v** e su **w.**
    i. Verificare che **u∧(v∧w)** è diverso da (**u∧v**)**∧w.**