

Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 2, n. 5, 6

1. Equazioni cartesiane di piani.

- Scrivere delle equazioni cartesiane che rappresentino i piani determinati da ciascun insieme di condizioni:
 - passare per il punto $(4,1,2)$ ed essere perpendicolare alla retta r di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t, y = 2t, z = 3t$
 - passare per il punto $(2,3,5)$ ed essere perpendicolare all'asse delle y
 - passare per il punto $A = (2,0,2)$, ed essere parallelo ai vettori $\mathbf{u} = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (2,0,-3)$
 - contenere i punti $A = (2,0,2)$, $B = (-1,3,2)$, $C = (0,2,1)$
 - essere parallelo all'asse delle y e alla retta di equazioni (nel parametro t) $x = 1 + t, y = 2t, z = 3t$ e passare per il punto $(4,1,2)$
 - contenere la retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t, y = 2t, z = 3t$ ed il punto $(2,1,2)$
 - contenere l'asse delle x ed il punto $(2,3,5)$
 - passare per l'origine delle coordinate ed essere parallelo al piano di equazione $x + 2y + z = \pi$
 - passare per il punto $(2,3,5)$ ed essere parallelo al piano dei due assi coordinati delle y e delle z
 - passare per i punti $(2,3,5)$, $(3,0,0)$ ed essere parallelo alla retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t, y = t, z = 3 - t$
 - passare per l'origine delle coordinate ed essere perpendicolare ai due piani di equazione, rispettivamente, $x + 2y = 0$ e $x + y - 3z = 3$.
- Scrivere delle equazioni parametriche per la retta che passa per il punto $P = (2,3,5)$ ed è perpendicolare al piano Π di equazione $x + y + 3z + 154 = 0$. Utilizzando le equazioni trovate, determinare la distanza del punto P da Π . Verificare il risultato ottenuto usando dei prodotti scalari (o, il che è lo stesso, la forma normale dell'equazione di Π).
- Scrivere un'equazione cartesiana del piano ψ che passa per il punto $(2,-3,4)$ ed è parallelo al piano φ di equazione $x + 2y - z + 4 = 0$. Trovare la distanza tra i piani ψ e φ .

2. Fasci di piani, equazioni cartesiane di rette.

- Dopo aver verificato che i piani $x - 5y + z = 1$, $3x - 5y + 2z = 4$ non sono paralleli, scrivere un'equazione del fascio dei piani che contengono la loro intersezione e determinare il piano del fascio che passa per il punto $(2,-3,4)$. Trovare un vettore di direzione e delle equazioni parametriche per la retta *asse* del fascio.

- Sia F il fascio dei piani che contengono la retta di equazioni parametriche (nel parametro s)
$$\begin{cases} x = s, \\ y = 3s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

Rappresentare F con una equazione cartesiana e determinare, *se possibile*:

- il piano di F che passa per l'origine delle coordinate
 - il piano di F che è parallelo alla retta di equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2t$ (nel parametro t)
 - il piano di F che è parallelo alla retta di equazioni cartesiane $x = y - 2 = 3z + 2$
 - il piano di F che è perpendicolare all'asse delle z
 - il piano di F che è parallelo all'asse delle z
 - il piano di F che contiene l'asse delle x
 - il piano di F che contiene la retta di equazioni cartesiane $x = y = z - 1$.
- Scrivere un'equazione del piano che contiene il punto $(1,1,1)$ e la retta di equazioni
$$\begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$$
.
 - Scrivere un'equazione del fascio dei piani perpendicolari alla retta di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$$
.
 - Nel fascio dei piani perpendicolari alla retta di equazioni cartesiane $x = 3y = z + 3$ determinare quello che passa per il punto $(1,1,1)$.
 - Mostrare che tutti i piani che sono perpendicolari al piano Φ di equazione $3x + 2y = 0$ nel punto $(2,-3,1)$ formano un fascio; in quale relazione è Φ con la retta sostegno del fascio
 - Scrivere un'equazione cartesiana per il piano che contiene il punto $(1,1,1)$ e l'asse delle y .
 - Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta che è perpendicolare a $x + 4y = 1$ e passa per il punto $(1,3,4)$.

3. Problemi su rette e piani.

- Verificare che le rette a , b , di equazioni cartesiane rispettivamente $\begin{cases} x-4y=2 \\ z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x-4y=0 \\ z=2 \end{cases}$, sono parallele, e che la retta intersezione del piano per a ed $U=(0,0,1)$ con il piano per b ed U è parallela a entrambe.
- Verificare che le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente, $\begin{cases} 4x-3z=5 \\ x+y=-3 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x=1 \end{cases}$ non sono parallele e scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo ad entrambe e passante per il punto $(1,1,0)$.
- Verificare che le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente, $\begin{cases} 4x-3z=5 \\ x+y=-3 \end{cases}$, $x=y=z-1$ sono sghembe. Scrivere un'equazione del piano che contiene la prima retta ed è parallelo alla seconda; calcolare la distanza tra le due rette.
- Verificare che il punto $L=(2,-3,4)$ non appartiene alla retta l di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=0 \end{cases}$ e trovare la distanza di L da l .
- Verificare che la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-3t \end{cases}$ e la retta s di equazioni cartesiane $x+y+z=0$ sono sghembe e calcolare la loro distanza. Esiste una retta perpendicolare ad entrambe che le incontra? Verificare che questa è determinata dai punti di r ed s che sono alla minima distanza.
- Dimostrare che il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti da due punti dati, $P_1=(x_1, y_1, z_1)$, $P_2=(x_2, y_2, z_2)$, è il piano che è perpendicolare alla retta di P_2P_1 e passa per il loro punto medio (*piano assiale*).
- Determinare e studiare l'insieme dei punti dello spazio che sono equidistanti da $P_1=(0,1,2)$, $P_2=(1,-1,0)$, $P_3=(0,0,2)$.
- Stabilire se le rette r , di equazioni $\begin{cases} x-3y-z=2 \\ -x+2y-4z=1 \end{cases}$, ed s , di equazioni parametriche $\begin{cases} x=3+t \\ y=2-2t \\ z=5+t \end{cases}$, nel parametro t , sono sghembe o complanari; nella prima eventualità, trovare la loro distanza, nella seconda, determinare il piano che le contiene.
- Verificare che le rette r , di equazioni $\begin{cases} x-y-z=2 \\ -x+2y-4z=1 \end{cases}$, r' di equazioni parametriche $\begin{cases} x=6t \\ y=5t \\ z=t+1 \end{cases}$ sono parallele, e trovare la distanza tra di esse.
- Stabilire, motivando la risposta, quali tra le seguenti coppie di rette sono costituite da rette complanari e trovare delle equazioni dei piani che le contengono:

a) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-9t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2s \\ y=-\frac{2}{3}s \\ z=6s \end{cases}$	b) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-9t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2+h \\ y=-h \\ z=2h \end{cases}$	c) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-9t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2+k \\ y=1+k \\ z=1+k \end{cases}$
---	---	---
- Trovare delle equazioni che rappresentino la retta proiezione ortogonale della retta $x=y=z$ sul piano $x=0$.
- Rappresentare con equazioni cartesiane la retta proiezione ortogonale dell'asse delle y sul piano $x+y+z=1$.
- Verificare che la retta, passante per $(2,1,3)$ e parallela alla retta a di equazioni $\begin{cases} x=4 \\ y=z \end{cases}$, giace nel piano α di equazione $2x+y-z=2$. Rappresentare con equazioni cartesiane il fascio improprio delle rette che giacciono in α e sono parallele ad a . Esiste nel piano α qualche retta parallela alla retta $x=y=z$?
- Esiste qualche retta che sia parallela a entrambi i piani $2x+y-z=2$, $y=z$? Se esiste, scriverne delle equazioni.
- Rappresentare con equazioni cartesiane il fascio proprio delle rette che passano per $(2,1,3)$ e sono contenute nel piano α di equazione $2x+y-z=2$.
- Dati due piani distinti, esiste qualche retta perpendicolare a entrambi?
- Verificare che le rette di equazioni, rispettivamente, $x=y=z$, $x+1=z=0$ sono sghembe e non passano per $(2,0,0)$. Determinare la retta per $(2,0,0)$ che incontra ciascuna di esse. (*Suggerimento*: quella retta è complanare con ciascuna delle due rette sghembe).