Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 3, n. 2, 3

1. Equazioni e sistemi equivalenti.

1. Per ciascuna coppia di equazioni, stabilire se è formata da due equazioni equivalenti:
a) $x + 5 = 0$; $-15 = 3x$; b) $3x = 0$; $x = 1/3$; c) $x(x-1) = 0$; $x - 1 = 0$.

2. I due sistemi lineari $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$ hanno entrambi la soluzione (0,0). Si può concludere che i due sistemi sono equivalenti? Motivare la risposta.

2. Riduzione di una matrice nella forma a scala.

1. Ridurre a scalini le seguenti matrici, e determinarne il rango:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 18 \\ -2 & 1 & -9 \\ 1 & -1/2 & 9/2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. In ognuna delle matrici che seguono, uno o più elementi dipendono dalla scelta di un numero reale α. Stabilire, per ciascuna matrice, se il suo rango possa variare a seconda della scelta di α e, in caso affermativo, spiegare in qual modo il rango dipenda da α.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & \alpha \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & \alpha + 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha^2 + 1 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha + 4 \end{pmatrix}.$$

3. Sistemi lineari.

1. Utilizzare la proposizione 3.6 del cap. 3 in [testo], o il teorema di Rouché-Capelli, per stabilire quali dei seguenti sistemi lineari è compatibile:

$$(a)\begin{cases} -x + y + z + w = -2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ -4y - z - 2w = 0 \end{cases}; (b)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \\ -x + 8y - 4z = 1 \end{cases}; (c)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 1 \end{cases}; (d)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \end{cases}; (e)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \\ -x + 5y - 3z = -4 \end{cases}.$$

2. Trovare, con il metodo di Gauss, tutte le soluzioni dei sistemi compatibili dell'esercizio 1.

3. Scrivere e risolvere, con il metodo di Gauss, tutti i sistemi lineari omogenei associati ai sistemi dell'esercizio 1.

4. Risolvere il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} 3x - z + w = 0 \\ x + y + 4z + 7w = 0 \\ x - 2y - 9z + w = 0. \end{cases}$

5. Determinare per quali valori del coefficiente λ è compatibile il sistema lineare $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$, in ognuno dei seguenti casi

$$(i)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (ii)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

e trovare quante e quali siano le soluzioni in ciascun caso di compatibilità.

6. Determinare i valori del parametro λ per cui sono compatibili i sistemi

$$(a)\begin{cases}-x+2y=1\\3x+y=\lambda\\x+y=2\end{cases};\quad (b)\begin{cases}x-y-6z=-3\\x+2y+4z=1\\x-y+2\lambda z=\lambda\\\lambda x+\lambda y-2z=1.\end{cases}$$

e trovare tutte le soluzioni di ciascun sistema.

7. Determinare i valori del parametro μ per cui il sistema omogeneo $\begin{cases}3x-y+z=0\\x+y+4z=0\\x-2y-z\mu=0\end{cases}$ ammette autosoluzioni; per quei valori di μ, trovare tutte le autosoluzioni.

8. Determinare i valori dei parametri λ, μ per cui il sistema $\begin{cases}x+2y=\mu\\x+4y=1\\x+(\lambda+2)y=1\end{cases}$ è compatibile e trovare tutte le soluzioni.

9. *Dal compito d'esame del 10 lug1io 2006.*
a. Discutere e, per il valori del parametro reale *k* per cui è possibile, risolvere il sistema lineare nelle incognite *x*,*y*,*z*

$$\begin{cases}x+y+2z=1\\2x-y+2z=2\\x+2y+3z=1\\2x+ky+4z=1-k\end{cases}.$$

b. Interpretare geometricamente i risultati ottenuti, rispondendo alle seguenti domande senza fare altri calcoli: dette *r* la retta di equazioni $\begin{cases}x+y+2z=1\\2x-y+2z=2\end{cases}$ ed r_k la retta di equazioni $\begin{cases}x+2y+3z=1\\2x+ky+4z=1-k\end{cases}$, esistono valori di *k* per i quali *r* e r_k sono sghembe? Vi sono valori di *k* per i quali r_k è parallela a *r?* Esistono valori di *k* per cui *r* e r_k sono incidenti? (punti 3+3)

10. *Dal compito d'esame dell'11 settembre 2006.*
a. Discutere e, per il valori dei parametri reale *h*, *k* per cui è possibile, risolvere il sistema lineare nelle incognite *x*,*y*,*z*

$$\begin{cases}x-2y-z=1\\x+z=h\\x+y+kz=0\end{cases}.$$

b. Sia:

- α il piano di equazione $x-2y-z=1$
- β il piano di equazione $x+z=h$
- γ il piano di equazione $x+y+kz=0$.

Senza fare ulteriori calcoli, utilizzare la discussione ed i risultati precedenti per rispondere alle domande:

i) esistono valori di *h* e *k* per i quali i tre piani si intersecano in un solo punto?
ii) Vi sono valori di *h* e *k* per i quali i tre piani appartengono ad uno stesso fascio (proprio)?
iii) Esistono valori di *h* e *k* per i quali il piano α è parallelo alla retta che è l'intersezione dei piani β,γ ?

(punti 5+3)