Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], cap. 3, n. E.3, 4.

1. *Dalla prova d'esame del 21 marzo 2006.*
Stabilire se i vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti; in caso negativo, scegliere un loro sottoinsieme S formato da vettori linearmente indipendenti (in numero massimo possibile) ed esprimere i restanti vettori come combinazione lineare di quelli del sottoinsieme S.

2. *Dal compito d'esame dell'11 settembre 2006.*
a. Discutere e, per i valori del parametro λ per cui esistono delle autosoluzioni, risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ .$$

b. Utilizzare i risultati ottenuti sopra per stabilire quali, tra i vettori

$$\mathbf{u_1} = (5,1,2), \ \mathbf{u_2} = (3,1,0), \ \mathbf{u_3} = (2,0,2), \ \mathbf{u_4} = (1,2,\lambda)$$

siano linearmente indipendenti, al variare di λ, e se sia possibile scrivere il vettore $\mathbf{u_4}$ come combinazione lineare di vettori, tra loro indipendenti, scelti fra $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$.

3. *Dalla prova d'esame del 3 aprile 2007*.
Stabilire se per qualche valore di α i vettori $\mathbf{a} = (1,1,9)$, $\mathbf{b}(\alpha) = (0,\alpha,1)$, $\mathbf{c} = (1,0,2)$ sono linearmente dipendenti; per quel valore di α, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

4. Utilizzare la teoria dei sistemi lineari per stabilire la compatibilità dell'equazione *matriciale* (equazione in cui l'incognita è una matrice) **AX = I** in ciascuno dei seguenti casi:

$$\text{(a)} \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \text{ numero reale.}$$

(*Suggerimento*: passare dall'equazione matriciale a sistemi lineari, in cui le incognite sono gli elementi della matrice **X**).
Nei casi in cui l'equazione è compatibile, trovarne le soluzioni.

5. Sono dati i vettori $\mathbf{a} = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$, $\mathbf{b} = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ **.** Verificare che:

i) **a, b** e il loro prodotto vettoriale sono versori, a due a due ortogonali tra loro

ii) il prodotto della matrice, di ordine 3, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{pmatrix}$ per la sua trasposta $\mathbf{H}^{\mathbf{T}}$ è la matrice identità, ovvero $\mathbf{H}\,\mathbf{H}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$

iii) anche $\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{H} = \mathbf{I}$.

Traendo spunto dalle verifiche precedenti, giustificare la seguente affermazione: *una matrice* **M,** *di ordine* 3, *tale che le sue righe siano versori a due a due ortogonali tra loro, è invertibile.*
Estendere l'affermazione al caso di matrici di ordine $n > 3$.