Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 3, n. 4, 6 e negli appunti del corso sul determinante, oppure in P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare,* Zanichelli, cap. 5, n. 3.

1. Stabilire quali tra le matrici che seguono sono invertibili e, in caso affermativo, calcolarne le inverse:

$$-\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcolare i determinanti delle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 67 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 23 \\ 0 & 4 & 6 & 43 \\ 0 & 0 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 9 & 0 \\ 44 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 22 & -2 & 2 \\ 44 & 55 & -11 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3. Usare le proprietà dei determinanti per verificare che, se i vettori (a,b,c), (a',b',c') sono linearmente indipendenti, posto

$$\mathbf{v} = \left(\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \right),$$

allora per ogni numero reale k, il vettore $k\mathbf{v}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}.$$

Suggerimento: sostituendo le componenti di **v** nel primo membro di ciascuna equazione si ottiene lo sviluppo di un determinante; perché quel determinante vale 0?

4. Usare dei determinanti per:

i) stabilire se esista qualche scelta dell'elemento h per cui la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & h \end{pmatrix}$ sia invertibile

ii) trovare per qual valore di k i tre vettori $(2,12,k)$, $(4,0,1)$, $(3,2,0)$ sono linearmente dipendenti.

5. Nello spazio, sono assegnati i punti $R = (1,0,2)$, $S = (2,2,0)$, $T = (0,0,3)$, $U = (1,1,1)$. Usare dei determinanti per:

a) verificare che i punti R,S,T,U non sono complanari
b) calcolare il volume del parallelepipedo individuato dagli spigoli RS, RT, RU;
c) scrivere un'equazione del piano δ passante per U e parallelo alle rette RS, RT;
c) scrivere l'equazione del piano STU.

6. Usare dei determinanti per

a) scrivere un'equazione del piano passante per (1,0,3) e parallelo alle rette di equazioni parametriche, rispettivamente nei parametri reali t ,s, $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}, \begin{cases} x = 1, \\ y = s \\ z = 2 - s \end{cases}$;

b) scrivere un'equazione del piano passante per (1,0,3) e perpendicolare alla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x - 3y - z = 2 \\ -x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$;

c) dati i punti A = (1,0,1), B = (2,0,−1), C = (1,0,4), D = (−3,1,2), verificare se essi sono complanari; in caso contrario, calcolare il volume del parallelepipedo che ha gli spigoli AB, AC, AD .

7. a) Dimostrare che la condizione perché due rette, di equazioni cartesiane rispettivamente $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$, $\begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$ siano sghembe, è che sia $\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix} \neq 0.$

b) Stabilire se le rette di ciascuna delle coppie seguenti sono sghembe; nel caso che le rette non siano sghembe, stabilire, con il calcolo del rango di opportune matrici, se siano parallele o incidenti:

$$\text{(i)} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 4y + z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ z = 2 \end{cases}; \quad \text{(ii)} \begin{cases} x + 4z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}.$$

8. a) Usare le proprietà dei determinanti per dimostrare che la condizione di allineamento di tre punti A,B,C nel piano è

$$\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Suggerimento: il determinante non cambia se ad una riga si sottrae un'altra.

b) Quale determinante del quarto ordine si può utilizzare per esprimere la condizione di complanarità di quattro punti dello spazio?

9. Si giustifichi la seguente affermazione: dati nel piano due punti distinti $A = (a,b)$, $B = (c,d)$, non allineati con l'origine O, l'area del parallelogrammo che ha AOB come vertici consecutivi è il modulo di

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Suggerimento: pensare O,A,B come punti dello spazio, con la terza coordinata uguale a zero, e calcolare il prodotto $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

10. Usare dei determinanti per

i) scrivere un'equazione della retta che, nel piano riferito a coordinate cartesiane x,y, congiunge i punti P = (2,9) e Q = (12, 5)

ii) verificare se i punti di coordinate (2,7), (−4, 3), (−2,5) sono allineati

iii) calcolare l'area del triangolo che ha per vertici i punti di coordinate (2,7), (−4,3), (1,0).

11. Usare un determinante per scrivere la condizione di parallelismo tra due rette individuate, nel piano, dalle equazioni $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$.

12. E' vero o falso che det(**A** + **B**) = det(**A**) + det(**B**) ? Motivare la risposta!