Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 4, n. 1, E.1, 2, E.2, 3 e negli appunti, del corso, sulle coniche, oppure in P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare,* Zanichelli, Appendice B.

Circonferenze nel piano.

1. Stabilire se le equazioni che seguono rappresentano delle circonferenze e, in caso affermativo, trovare i relativi centri e raggi
$$a)\ x^2+y^2+2x+1=0;\ b)\ x^2+y^2+x+1=0;\ c)\ 4x^2+4y^2+2x-1=0.$$
2. Stabilire quale tra i punti P = (4,−3), Q = (−3,−1), R = (−3/2,−3/2) è interno e quale appartiene alla circonferenza $x^2+y^2+4x+2y+4=0$.
3. Se esiste una circonferenza che passi per i punti L = (−1,−1), M = (0,−8) e per l'origine O = (0,0), trovarne il centro, il raggio, un'equazione, e la tangente nell'origine.
4. Trovare un'equazione della circonferenza che passa per A = (2,4) ed è tangente in B = (–2,–1) alla retta di equazione $x-2y=0$.
5. a) Tutte le circonferenze che passano sia per B = (–2,–1) che per C = (0,1) hanno i centri su una stessa retta: quale? b) Quante e quali sono le circonferenze che passano per B e per C e sono tangenti in C alla retta $x + y = 1$? c) Quante e quali sono le circonferenze che passano sia per B che per C e sono tangenti alla retta di equazione $x = 1$?
6. a) Scrivere un'equazione per rappresentare la famiglia (fascio) F di tutte le circonferenze che sono tangenti nel punto A = (2,4) alla retta $x - y + 2 = 0$. b) Scrivere le equazioni delle circonferenze della famiglia F, che hanno raggio uguale ad 1. c) Esiste in F una circonferenza che passi per C = (0,1)? In caso positivo, determinarne il centro e il raggio.
7. Determinare centro, raggio ed un'equazione della circonferenza che passa per A = (2,4), per C = (0,1) ed ha il centro sull'asse delle x.
8. Fra tutte le circonferenze che hanno il centro nel punto A = (2,4), trovare quella che è tangente alla retta di equazione $3x = y$, stabilendo quale sia il punto di contatto; scrivere un'equazione della circonferenza trovata.

Coniche

1. Determinare il tipo (ellisse, parabola, iperbole, conica degenere) e tracciare uno schizzo approssimativo, segnando fuochi, assi, eventuali asintoti, delle curve rappresentate delle equazioni seguenti:
$$a)\ x^2+4y^2-16=0;\quad b)\ 4y^2-x=0;\quad c)\ 4y^2-x^2=0;\quad d)\ 4x^2+4y^2=1;\quad e)\ x^2-y^2+1=0.$$
2. Su un foglio di carta quadrettata, tracciare uno schizzo approssimativo, segnando fuochi, vertici, assi, eventuali asintoti, delle coniche di equazioni:
$$\text{a)}\ 4x^2+25(y-1)^2=100;\quad \text{b)}\ xy=6;\quad \text{c)}\ y^2+4x^2=0;\quad \text{d)}\ y^2-4(x-1)=0;\quad \text{e)}\ (y+x)^2-4(x-y)^2=1.$$
3. Scrivere un'equazione cartesiana dell'ellisse che ha un fuoco nell'origine delle coordinate, l'altro in (2,2) e il cui asse traverso ha lunghezza $2a = 8$. Rappresentare la stessa ellisse in forma canonica (riferita ai suoi assi).
4. Scrivere un'equazione della parabola che ha come direttrice la retta $x = y$ ed il fuoco nel punto (0, –1). Qual è il vertice di questa parabola?
5. **(<u>Studio dell'iperbole</u>)** Verificare che le rette parallele ad un asintoto dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ incontrano l'iperbole in un solo punto, fuorché l'asintoto stesso, che non ha intersezioni con l'iperbole.

i) Utilizzare l'osservazione precedente per determinare gli asintoti e quindi il centro dell'iperbole di equazione $3x^2+4xy+y^2+8x=0$.

(*Suggerimento: imporre che un certo sistema di secondo non abbia soluzioni*)

ii) Verificare che la conica di equazione $2x^2-3xy-2y^2+2x=0$ è un'iperbole equilatera (cioè, ha asintoti perpendicolari tra loro); trovarne il centro.

iii) Si ricordi che le bisettrici delle due rette di equazioni $ax + by + c =0$, $a'x + b'y + x' = 0$ sono (perché?) le rette di equazioni $\frac{ax+by+x}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$. Utilizzare questa osservazione per trovare gli assi delle iperboli studiate sopra.

6. **(Studio della parabola)** Verificare, usando il "teorema di classificazione", che l'equazione
$$x^2+4xy+4y^2+6x = 0$$
rappresenta una parabola p. Ricordando che le rette parallele all'asse incontrano la parabola in un solo punto e che la tangente nel vertice ha la direzione perpendicolare a quella dell'asse, determinare l'asse e il vertice di p.

(Suggerimento: imporre che un certo sistema di secondo grado abbia una sola soluzione)

7. Utilizzando le proprietà di simmetria delle coniche e anche semplici sostituzioni di variabili (sfruttando decomposizioni in fattori o completamenti di quadrati) determinare il centro, gli assi, gli eventuali asintoti, oppure, in caso di coniche degeneri, le componenti delle coniche di equazioni
a) $x^2+4y^2+8y+3 = 0$; b) $x^2+4xy+3y^2 = 0$; c) $(x–2y)(x+2y) = 1$; d) $x^2+4xy+3y^2 = 1$;
e) $4x^2+12xy+9y^2-3x+2y= 0$; f) $x^2+9y^2+4x-12y+15= 0$; g) $x^2+4y^2-4xy=1$.
8. Stabilire il tipo (ellisse, parabola, iperbole) delle coniche della famiglia rappresentata dalla equazione, dipendente dal paramento k, $(x-k)^2-9(y-2k^2)^2-36=0$; determinare e studiare la curva luogo dei centri delle coniche della famiglia.
9. Stabilire per quali valori del parametro A l'equazione $x^2+2Axy+Ay^2-4x+3y+1=0$ rappresenti delle iperboli, delle parabole, delle ellissi. Verificare che una tra le parabole trovate ha l'asse parallelo all'asse delle y, e determinarne vertice, fuoco ed equazione canonica (con asse della parabola coincidente con l'asse delle x).
10. a) Scrivere delle equazioni parametriche per la conica di equazione $(x-2)^2+9(y+2)^2-36=0$ ed utilizzarle per determinare la tangente alla conica nel punto $(5,-2+\sqrt{3})$.
    b) Trovare delle equazioni parametriche della circonferenza $x^2 + y^2 –2x –1 = 0$ e utilizzarle per scrivere un'equazione della tangente in (2,1).
    c) Scrivere delle equazioni parametriche per la conica rappresentata dall'equazione $4x + y^2 = 0$ e usarle per trovare la tangente in (–9, 6).
11. Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, dimostrare che il luogo dei punti medi delle intersezioni di una parabola con le rette per il suo vertice è ancora una parabola.
12. Sia $\alpha > \beta > 0$. Studiare, al variare di k, le coniche della famiglia $\dfrac{x^2}{k+\alpha}+\dfrac{y^2}{k+\beta}=1$ verificando che esse hanno tutte gli stessi fuochi.
13. (*Dalla prova d'esame del* 3 aprile 2007) Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali x,y, è assegnata la famiglia di coniche di equazione (dipendente da un parametro k)
$$k x^2 + y^2 + 12(k–1) x –2 k y – 6 k = 0.$$

a) Stabilire per quali valori di k le coniche corrispondenti siano ellissi, parabole, iperboli. (1 punto)

b) Se la famiglia contiene una circonferenza, determinare il centro, il raggio di questa circonferenza e le sue equazioni parametriche. (punti 1+ ½)

c) Studiare brevemente la conica che si ottiene per $k = 0$, determinandone fuochi, vertici, e l'eccentricità. (p. 1+ ½)

14. (*Dalla prova scritta del* 10 luglio 2006). Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche dell'ellisse E che ha come fuochi i punti $O = (0,0)$ e $Q = (8,0)$ e ha un vertice nel punto $R = (-4,0)$. Trovare gli altri tre vertici di E. (3 punti)
15. Determinare un'equazione cartesiana per la curva C di equazioni parametriche $y = 2 + t$, $x = 1 + t^2$ e fare un breve studio di C.
16. Trovare un'equazione cartesiana per la curva di equazioni parametriche $x=t, y=\dfrac{t}{t+1}$, e studiare brevemente questa curva.
17. Per ogni punto A sull'asse delle x sia A' il punto che è simmetrico di A rispetto a $U = (1,0)$. Siano: r la retta congiungente A con (0,1), r' la retta per A' e per (0,–1), P il punto comune a r e r'. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del luogo L descritto da P al variare di A sull'asse delle x. Studiare L.
18. Trovare un'equazione polare per l'ellisse di eccentricità 1/4, con un fuoco a distanza 2 dalla relativa direttrice.
19. Quale curva è rappresentata dall'equazione polare $\rho=\cos\vartheta$?
20. Descrivere la curva di equazione polare $\rho=\dfrac{1}{1+2\cos\vartheta}$.