Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 4, n. 4, E.4, 5, E.5, 6 e negli appunti, del corso, sulle superfici e curve nello spazio, oppure in P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare,* Zanichelli, Appendice C.

Superfici e curve nello spazio.

1. Superfici sferiche e circonferenze nello spazio.

1. Stabilire se le equazioni che seguono rappresentano delle superfici sferiche (o, per semplicità, sfere) e e, in caso affermativo, trovare i relativi centri e raggi
$a)\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0;\ b)\ x^2+y^2+z^2+2x-y+z+8=0;\ c)\ x^2+y^2+z^2+2x+2y+2=0.$

2. Stabilire se esiste una sfera che passi per i punti $P = (4,-3,0)$, $Q = (-2,-3,0)$, $R = (-2,0,0)$, $S = (0,0,4)$; in caso affermativo, trovarne il centro, il raggio ed un'equazione.

3. Trovare il piano che è tangente alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-y+8z=0$ nell'origine delle coordinate.

4. Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che è tangente al piano $x+y+z=3$ nel punto (2,1,0) e passa per il punto (4,5,2).

5. Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che ha il centro nel punto (2,1,−3) ed è tangente al piano $2x+y-z=0$.

6. Scrivere un'equazione della sfera che ha i punti (1, 1, −1) e (1, −2, 1) come estremi di un diametro. Trovare il centro ed il raggio della circonferenza che è la sezione di questa sfera con il piano di equazione $x = z$ e rappresentare questa circonferenza con equazioni cartesiane.

7. Scrivere un'equazione della sfera con il centro sul piano $x = 0$ che taglia sul piano $2x + y + z -7 = 0$ la circonferenza di centro (2,2,1) e raggio $\sqrt{3}$.

8. Quante sono le sfere di raggio uguale a 5 che tagliano sul piano $z = 3$ la circonferenza di centro (1,1,3) e raggio uguale a 3? Trovarne delle equazioni cartesiane.

2. Coni, cilindri, quadriche

1. Studiare le curve che si ottengono tagliando la superficie S di equazione $3x^2 + 4z^2 = 12$ con i piani paralleli ai piani coordinati. Da questo studio ricavare quale tipo di quadrica sia la superficie S. Trovare delle equazioni parametriche di S. Verificare che la curva (*elica*) di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = t \\ z = \sqrt{3}\sin t \end{cases},\ \text{per}\ t \in \Re,$$
giace su S e trovare la retta tangente a questa curva nel punto $(2,2\pi,0)$.

2. Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per il cilindro con le generatrici parallele all'asse delle x che taglia sul piano $x = 0$ l'ellisse di equazioni
$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2+4z^2-64=0. \end{cases}$$

3. Rappresentare in forma parametrica le rette che congiungono l'origine delle coordinate con i punti della parabola $\mathcal{P}$ di equazioni $\begin{cases} z = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$; ricavare dalle equazioni parametriche un'equazione cartesiana del cono

con vertice nell'origine che contiene la parabola $\mathcal{P}$. Determinare il tipo delle intersezioni del cono con i piani x = costante.

4. Scrivere delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana del cono con vertice nell'origine che taglia sul piano $y = 2$ la circonferenza di centro (0,2,0) e raggio 3.

5. Scrivere delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana del cono di vertice (0,0,1) che taglia sul piano $z = 0$ la circonferenza $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$. Verificare che la matrice dei coefficienti dell'equazione del cono è singolare.

6. Trovare delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana del cilindro con generatrici parallele all'asse delle z che contiene la circonferenza di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$. Studiare l'intersezione di questo cilindro con il piano $x = y$.

7. Studiare le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati di ciascuna delle quadriche di equazioni

$$\text{a) } x^2 + y^2 - z^2 = 1; \quad \text{b) } x^2 - 4y^2 - z^2 = 1; \quad \text{c) } xy = z; \quad \text{d) } x^2 + 4z^2 = 2y.$$

Dedurne se si tratta di ellissoide, iperboloide a una o due falde, paraboloide ellittico o a sella.

8. Una delle quadriche seguenti è tagliata da piani paralleli ad uno dei piani coordinati lungo delle circonferenze: quale?

$$\text{(i) } 4x^2 - y^2 = 2z, \quad \text{(ii) } 4x^2 + 4y^2 - z = 0.$$

Spiegare come la quadrica che contiene circonferenze possa essere generata dalla rotazione di una conica (è detta perciò *quadrica rotonda*) e ricavare delle equazioni parametriche di questa superficie.
Studiare le intersezioni dell'altra quadrica con i piani del fascio improprio $2x + y = h$ e stabilire, in base ai risultati ottenuti, se si tratta di paraboloide ellittico o a sella.

9. Per ciascuna delle quadriche seguenti, esaminare le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati e dedurne se si tratti di ellissoidi o iperboloidi ad una falda o a due falde, e se fra di esse vi siano quadriche rotonde:

(a) $3x^2-4y^2-4z^2 = 1$, (b) $(x-1)^2+4y^2+(z+3)^2 = 1$, (c) $4x^2+4y^2+4z^2+x+10z = 0$, (d) $-4x^2+y^2-z^2 = 1$.

10. Verificare che le rette delle due famiglie rappresentate, al variare dei parametri reale t,s, dalle equazioni

$$\begin{cases} x = tz \\ y = \dfrac{1}{4t} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = s \\ y = \dfrac{z}{4s} \end{cases}$$

giacciono tutte su una stessa quadrica (che è un paraboloide a sella).
Mostrare che due rette della stessa famiglia sono sghembe e che due rette di famiglie diverse si incontrano in un punto della quadrica. In particolare, dopo aver verificato che il punto (1,1,4) appartiene alla quadrica, determinare le rette di ciascuna famiglia che passano per esso, e scrivere un'equazione del piano delle due rette.

Ricordare di iscriversi all'esame usando il sistema UNIWEX, ***entro le 15 del 29 marzo*****.**