A proposito dell'esercizio 5 del gruppo dei problemi su rette e piani.

Verificare che la retta *r* di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}$ e la retta *s* di equazioni cartesiane $x + y = z = 0$ sono sghembe e calcolare la loro distanza. Esiste una retta perpendicolare ad entrambe che le incontra? Verificare che questa è determinata dai punti di *r* ed *s* che sono alla *minima* distanza.

A. *Verifichiamo che r, s sono sghembe.*
Se *r, s* avessero un punto in comune, questo (appartenendo ad *s*) dovrebbe avere la terza coordinata uguale a 0, quindi dovrebbe ottenersi per $t = 0$ dalle equazioni parametriche di *r*; sarebbe allora il punto (1,0,0), che però non appartiene al piano $x + y = 0$ su cui sta *s*. Quindi le due rette non si intersecano; verifichiamo che non sono parallele. La retta *r* ha come vettore direttore (1,2,–3), la *s* (di equazioni parametriche $x = \tau$, $y = -\tau$, $z = 0$) ha vettore direttore (1,–1,0), che non è multiplo di (1,2,–3), quindi le rette non sono parallele
Dunque le due rette sono sghembe.

B. *Calcoliamo la distanza tra r,s.*
Presentiamo due modi alternativi per calcolare la distanza tra le due rette.
1. Determiniamo il piano per una retta che è parallelo all'altra; la distanza di un punto qualsiasi della seconda retta da questo piano è la distanza cercata.
Tutti i piani per *s* appartengono al fascio di equazione (nei parametri λ, μ)
$$\lambda(x+y) + \mu z = 0 \;;$$
tra questi, il piano parallelo alla retta *r* verifica la condizione
$$(1,2,-3) \bullet (\lambda, \lambda, \mu) = 3\lambda - 3\mu = 0$$
e quindi è il piano Φ di equazione
$$x + y + z = 0.$$
Sia *R* un punto qualsiasi di *r* ; la distanza di *R* da Φ è data dal modulo del prodotto scalare del vettore $\overrightarrow{OR}$ per un versore perpendicolare al piano Φ. Questo prodotto scalare si ottiene sostituendo le coordinate di *R* nel primo membro dell'equazione di Φ in forma normale: quindi la distanza richiesta è
$$\left| \frac{1 + t + 2t - 3t}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \,.$$
2. Determiniamo la direzione perpendicolare ad entrambe le rette *r, s* calcolando il prodotto vettoriale
$$\mathbf{N} = (1,2,-3) \wedge (1,-1,0) = -3(1,1,1).$$
La distanza tra le due rette è il modulo della componente lungo la direzione di **N** di un vettore avente primo estremo su una retta e secondo estremo sull'altra, ad esempio $\overrightarrow{OI}$, con $O = (0,0,0) \in s$, $I = (1,0,0) \in r$; tale componente coincide con il modulo del prodotto scalare di $\overrightarrow{OI}$ per un versore parallelo ad N, quindi è
$$\frac{(1,0,0) \bullet (1,1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \,.$$

C. *Cerchiamo se esiste una retta perpendicolare a r, s che le incontra entrambe.*
Una retta perpendicolare ad entrambe *r, s* ha la direzione di $\mathbf{N} = (1,2,-3) \wedge (1,-1,0) = -3(1,1,1)$. Per ogni punto $(1+t, 2t, -t)$ di *r* passa una retta con questa direzione; essa ha le equazioni parametriche, nel parametro *u*,
$$\begin{cases} x = (1+t) + u \\ y = 2t + u \\ z = -3t + u \end{cases} .$$
Perché una di queste infinite perpendicolari intersechi anche la retta *s*, deve essere
$$\begin{cases} 1 + t + u = -2t - u \\ -3t + u = 0 \end{cases} , \text{ cioè } \begin{cases} 3t + 2u = -1 \\ -3t + u = 0 \end{cases} .$$
Da queste equazioni si ricava
$$(\heartsuit) \quad u = -1/3,\ t = -1/9.$$
Il punto di *r* per cui passa la perpendicolare cercata è $A = (8/9, -2/9, -1/3)$; la retta perpendicolare ed incidente a *r,s* è dunque la retta *p* di equazioni parametriche

$$(*)\begin{cases} x = \dfrac{8}{9} + u \\ y = -\dfrac{2}{9} + u \\ z = \dfrac{1}{3} + u \end{cases}.$$

La retta *p* può essere trovata anche in altro modo, osservando che essa, dovendo incontrare *r*, *s*, deve essere complanare con ciascuna delle due. Tra i piani per *r*, ne esiste uno che è parallelo alla direzione di **N,** cioè tale che la sua direzione normale sia perpendicolare ad **N,** così come tra i piani per *s* ne esiste uno con vettore normale perpendicolare a **N**; la retta intersezione di questi due piani ha la direzione di **N** ed incontra sia *r* che *s*.
Eliminando il parametro *t* dalle equazioni parametriche di *r*, si ottengono le equazioni cartesiane di *r*

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

e quindi le equazioni dei piani del fascio, al variare dei parametri α, β:

$$\alpha(2x - y - 2) + \beta(3y + 2z) = 2\alpha x + (-\alpha + 3\beta)y + 2\beta z - 2\alpha = 0.$$

Perché uno di questi piani sia parallelo alla direzione di **N,** occorre che il vettore normale $(2\alpha,(-\alpha + 3\beta),2\beta)$ sia ortogonale ad **N,** ovvero che sia

$$(2\alpha,(-\alpha + 3\beta),2\beta)\bullet(1,1,1) = 0.$$

Si trova che deve essere $\alpha + 5\beta = 0$. Il piano cercato è quindi

$$-10x + 8y + 2z + 10 = 0.$$

Analogamente, nel fascio di piani per *s*

$$\lambda(x + y) + \mu z = 0$$

il piano parallelo ad **N** si ottiene per $(\lambda,\lambda,\mu)\bullet(1,1,1) = 0$, cioè se $2\lambda + \mu = 0$; il piano cercato è $x + y - 2z = 0$. La retta *p* ha dunque le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} -5x + 4y + z + 5 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Per controllo, conviene sostituire le espressioni parametriche (*) in queste ultime equazioni, ottenendo delle identità.

D. *Verifichiamo che la perpendicolare incidente a entrambe le rette sghembe le interseca in punti la cui distanza è quella che abbiamo già trovato, e che è la minima distanza tra punti delle due rette.*
Il punto in cui *p* incontra *r* è $A = (8/9,-2/9,-1/3)$, che abbiamo già trovato, che verifica le (*) per $u = 0$; per $u = -1/3$ (come stabilito dalle (♥)) si trova il punto $B = (5/9,-5/9,0)$ che appartiene ad *s*.
La distanza tra *A* e *B* è esattamente $\sqrt{(3/9)^2 + (3/9)^2 + (1/3)^2} = \sqrt{3(1/3)^2} = \sqrt{3}/3$.
Sia $F(t,\tau)$ la funzione che esprime **il quadrato della distanza** tra un punto di *r* ed uno di *s* :

$$F(t,\tau) = (1 + t - \tau)^2 + (2t + \tau)^2 + 9t^2.$$

Si verifica senza difficoltà che le derivate prime di *F* rispetto a *t* e a τ sono entrambe nulle per $t = -1/9$, $\tau = 5/9$; ed è

$$F(-1/9,5/9) = (1 - 2/3)^2 + (1/3)^2 + 1/9 = 3/9.$$