Come si stabilisce se un sistema lineare è compatibile?

La risposta a questa domanda è contenuta nella proposizione 3.6, pag. 120 del [testo] (S. Abeasis, *Geometria analitica del piano e dello spazio,* Zanichelli, 2002) e può essere espressa, utilizzando la definizione di *rango* di una matrice (3.9 in [testo]), anche in questa forma[1]:

> **Teorema di Rouché-Capelli.** *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema lineare di m equazioni in n incognite* **AX = B** *sia compatibile è che il rango della matrice* **A** *dei coefficienti* ("*matrice incompleta*") *sia uguale a quello della matrice "completa"* $\left(\mathbf{A}|\mathbf{B}\right)$.

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema di Rouché-Capelli basta ripetere i ragionamenti con cui si dimostrano la prop. 3.6 ed il suo corollario, e precisamente:

1. il sistema dato è equivalente a (cioè, ha le stesse soluzioni di) un sistema a scala, che si ottiene a partire dal sistema dato applicando il procedimento di eliminazione di Gauss. Infatti, ogni passo del procedimento di Gauss è o un cambiamento dell'ordine delle equazioni, o è la moltiplicazione di un'equazione per uno scalare diverso da zero, o è la sostituzione di un'equazione con la combinazione lineare, con coefficienti diversi da zero, di quella equazione e di un'altra; ciascuna di queste operazioni non cambia l'insieme delle soluzioni del sistema.
2. Per un sistema lineare omogeneo il procedimento di eliminazione ovviamente non ha nessuna influenza sulla matrice completa. Se, dopo la riduzione a scala, la matrice dei coefficienti ha esattamente n pivots, il sistema ammette soltanto la soluzione banale[2]; se i pivots sono r, con $r < n$, allora, considerando come parametri liberi le n-r incognite residue, si ricavano le r incognite che hanno come coefficienti i pivots, in funzione di n-r parametri. Quindi, se $r < n$, il sistema omogeneo ha infinite soluzioni non banali, dipendenti da n-r parametri.
3. Se operando in modi diversi si ottenessero due differenti riduzioni a scala di una matrice **M**, una con r pivots e l'altra con r' pivots, allora dalla prima riduzione si ricaverebbe che il sistema omogeneo **MX** =**0** ha soluzioni che dipendono da n-r parametri liberi mentre dalla seconda riduzione si avrebbe che le stesse soluzioni dipendono da n-r' parametri: allora deve essere $r = r'$. E' quindi lecito chiamare *rango* di una matrice il numero di pivots di una qualsiasi riduzione a scala di quella matrice.
4. Indichiamo con r il rango della matrice **A**. Riducendo a scala il sistema, si ottiene un sistema, equivalente a quello dato, nel quale le ultime m-r equazioni hanno il primo membro identicamente nullo. Il sistema ammette soluzione se e soltanto se ciascuna delle ultime m-r equazioni ha anche il secondo membro uguale a 0, cioè si riduce a $\mathbf{0x} = 0$. Questo accade se e solo se la matrice completa $\left(\mathbf{A}|\mathbf{B}\right)$ ha anch'essa rango r: infatti, se la matrice completa ha rango r+1 (e solo in questo caso), il sistema a scalini contiene un'equazione *incompatibile* $\mathbf{0x} = c_{r+1}$, nella quale tutti i coefficienti delle incognite sono uguali a zero, mentre il termine noto è diverso da zero.

C.V.D.

[1] P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare,* Zanichelli, 2000, teor. 3.3, pag. 125
[2] Dall'ultima equazione si ottiene $x_n = 0$, dalla penultima $x_{n-1} = 0$, e così via.

Nell'usare il teorema di Rouché-Capelli per discutere un sistema lineare, può essere utile riferirsi a questo schema, tratto da M. Bordoni, *Geometria, I modulo: Algebra lineare,* Progetto Leonardo, soc. ed. Esculapio, Bologna, 2001.

Schema del procedimento risolutivo di un sistema lineare di *m* equazioni in *n* incognite