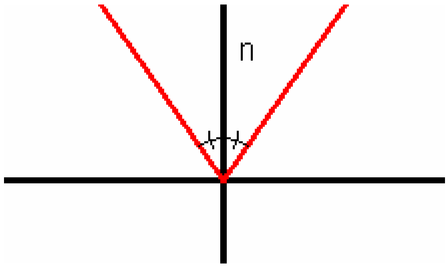
# 1. Proprietà focali delle coniche

Per questo argomento, vedere anche P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare*, Zanichelli, Appendice B.

Ricordiamo che il fenomeno fisico della riflessione è governato dalla legge sull'uguaglianza tra gli angoli che il raggio incidente e il raggio riflesso formano con la retta normale alla superficie riflettente. Se questa non è piana, la normale alla superficie in un suo punto è la retta perpendicolare al piano tangente (cioè la piano che meglio approssima la superficie) in quel punto.




Le lampade ellittiche e le camere a volta ellittica sfruttano una proprietà dell'ellisse che permette di prevedere quale sarà il raggio riflesso di un raggio originato in un fuoco. Per dimostrare la proprietà, occorrono soltanto conoscenze di geometria elementare del piano, precisamente:

- due rette incidenti individuano quattro angoli, le cui bisettrici sono due rette tra loro perpendicolari
- la perpendicolare ad un segmento nel suo punto medio (*asse del segmento*) è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento
- in un triangolo isoscele, l'asse della base coincide con la bisettrice dell'angolo opposto alla base
- in un qualsiasi triangolo, un lato è minore della somma degli altri due (*disuguaglianza triangolare*).

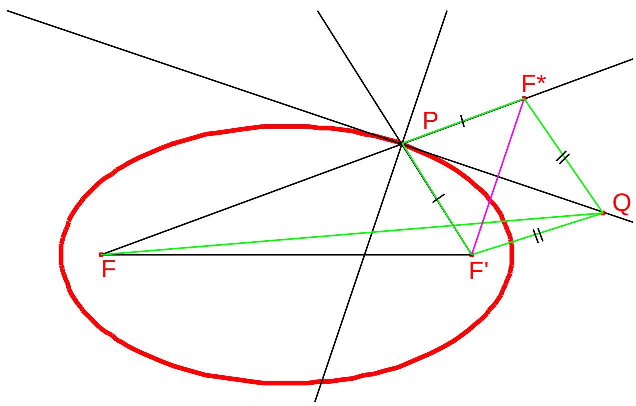
**Proposizione.** *Le rette che congiungono un qualunque punto P di un'ellisse con i due fuochi hanno come bisettrici la tangente e la normale all'ellisse in P.*

**Dimostrazione.** Fissati i due fuochi *F, F'* e la costante positiva 2*a*, è determinata l'ellisse, come il luogo dei punti *P* per i quali:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \ .$$

Preso un punto *P* qualsiasi dell'ellisse, sulla retta *FP* consideriamo il punto *F** che si trova dall'altra parte di *F* rispetto a *P* e tale che sia $\overline{PF^*} = \overline{PF'}$. Chiamiamo *b* la bisettrice dell'angolo con vertice *P* del triangolo isoscele *PF'F** . Vogliamo far vedere che *b* non ha altri punti in comune con l'ellisse oltre a *P*, quindi è tangente all'ellisse in *P*.

Sia *Q* un punto qualsiasi della bisettrice, diverso da *P*; calcoliamo la somma $\overline{QF} + \overline{QF'}$ delle sue distanze dai fuochi.




Poiché *Q* appartiene all'asse del segmento *F'F**, si ha:

$$\overline{QF}+\overline{QF'}=\overline{QF}+\overline{QF^*}.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare al triangolo *QFF** si ottiene:

$$\overline{QF}+\overline{QF^*}>\overline{FF^*}=2a.$$

Si conclude che è

$$\overline{QF}+\overline{QF'}>2a,$$

quindi *Q* non appartiene all’ellisse.

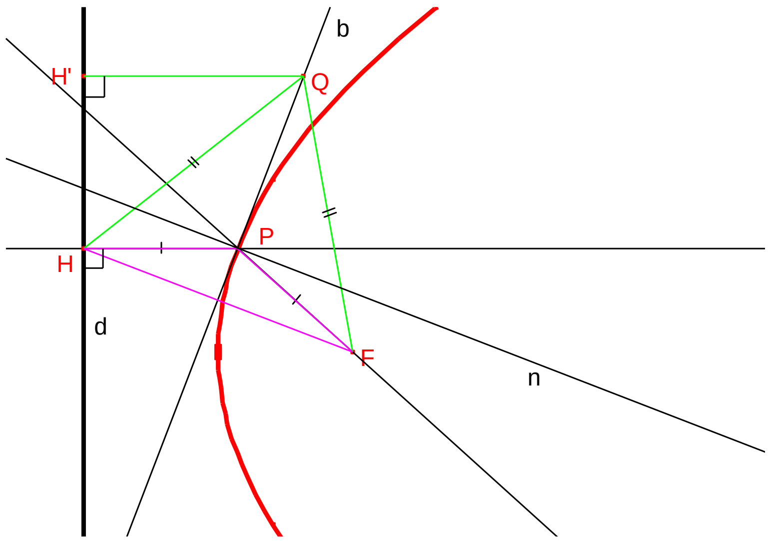
C.v.d.

Anche l’iperbole gode della stessa proprietà, che si dimostra in modo del tutto analogo.

Per la parabola si dimostra, modificando in modo opportuno il ragionamento precedente (il lettore può farlo senza difficoltà), la proprietà per cui si costruiscono antenne, fari, specchi parabolici: un raggio parallelo all’asse della parabola viene riflesso in un raggio che passa per il fuoco.

**Proposizione.** *La retta che congiunge un punto P qualsisia di una parabola con il fuoco e la retta per P perpendicolare alla direttrice hanno come bisettrici la tangente e la normale alla parabola in P.*

**Dimostrazione.** Il lettore è invitato ad adattare la dimostrazione precedente, sfruttando l’eguaglianza delle distanze di *P* dal fuoco *F* e dalla direttrice *d*.




In questo caso, basta ricordare che in un triangolo rettangolo (come *QH’H*) l’ipotenusa è maggiore di ogni cateto, per concludere che un punto *Q*, diverso da *P*, sulla bisettrice dell’angolo al vertice nel triangolo isoscele *PFH,* non ha ugual distanza da *F* e da *d*.

C.v.d.

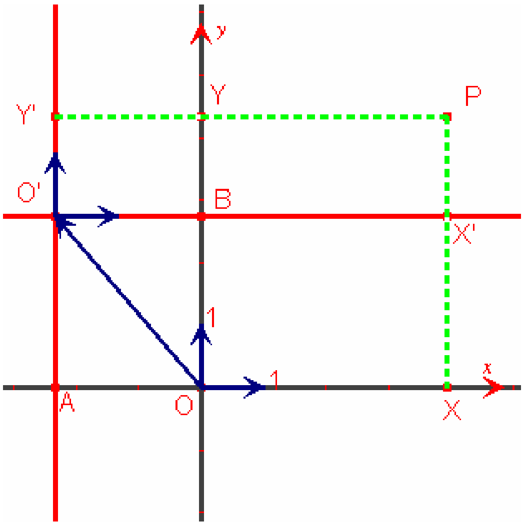
## 2. La classificazione delle coniche
## 2.A. Cambiamenti di coordinate cartesiane nel piano.

Ci interessano soltanto i cambiamenti di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche[1]. Lasciando immutata l’unità di misura, si può cambiare il sistema di riferimento o scegliendo una origine diversa senza mutare la direzione e l’orientazione degli assi coordinati, o

[1] casi più generali verranno affrontati in corsi successivi, in particolare in quello di Algebra lineare

cambiando gli assi senza mutare l'origine, oppure cambiando insieme sia l'origine che la direzione degli assi.

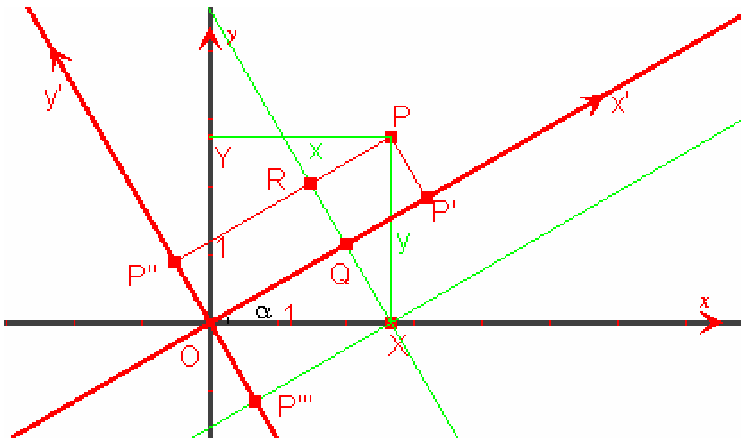
Nel primo caso, la relazione tra le coordinate di uno stesso punto *P* nei due diversi sistemi *Oxy* e *O'x'y'* si trova facilmente. Siano (*a*,*b*) le coordinate, nel riferimento *Oxy*, della nuova origine *O'*. Nella figura qui sotto, il segmento orientato *OA* ha misura *a* , mentre *b* è la misura con segno del segmento orientato *OB.*




Ragionando sulle relazioni tra i segmenti orientati che sono le proiezioni di un punto *P* qualsiasi sugli assi nei due sistemi di riferimento, si trova come esprimere le coordinate *x'*, *y'* in funzione delle coordinate $x, y$ :

$$\text{(A.1)} \qquad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}.$$

Nel secondo caso, dato il riferimento *Oxy*, scegliamo come nuovo asse *x'* delle ascisse una retta orientata per *O*, che forma con il vecchio asse *x* delle ascisse l'angolo $\alpha$; il nuovo asse delle ordinate è l'unica retta orientata che forma con *x'* l'angolo $\pi/2$. Occorrono soltanto le nozioni fondamentali di trigonometria per costruire le relazioni tra le coordinate *x'*, *y'* e le coordinate *x, y* di uno stesso punto *P*.




Ci limitiamo a ragionare su *x'*, misura con segno del segmento *OP'*. La figura ci aiuta a riconoscere che *x'* è la somma algebrica delle proiezioni ortogonali dei due segmenti orientati

*OX, XP*. Utilizzando per comodità la stessa notazione per il segmento e la sua misura con segno, abbiamo:

$$x' = OQ + QP' = OQ + RP = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

In modo analogo si trova

$$y' = OP'' = P'''P'' - OP''' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Infine, mettendo insieme queste ultime relazioni con le (A.1), si trova che per il passaggio da un sistema ortogonale monometrico ad un altro, con diversa origine e diversa orientazione degli assi (ortogonali), la relazione tra vecchie e nuove coordinate è

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + d \end{cases}$$

o, in forma più compatta

$$\text{(A.2)} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

cioè

$$\text{(A.2')} \qquad \mathbf{X}' = \mathbf{MX} + \mathbf{T}, \text{ con } \mathbf{MM}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{M}) = 1.$$

Da (A.2') ricaviamo subito che il cambiamento di coordinate inverso è dello stesso tipo:

$$\text{(A.2'')} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}' + \mathbf{B}, \text{ con } \mathbf{B} = -\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}.$$

## 2.B. Invarianti di una conica rispetto ai cambiamenti di coordinate ortogonali.

Si chiama *curva di secondo ordine* un insieme di punti del piano le cui coordinate soddisfano una equazione di secondo grado

$$\text{(B.1)} \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Sono curve di secondo grado le (già note) *coniche in forma canonica*; per esempio, se nella (1) è $a_{11} = 1/a^2$, $a_{22} = 1/b^2$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -1$, si ottiene l'equazione canonica di una ellisse.
Sono curve di secondo ordine anche quelle definite dalle equazioni:

$$\text{(B.2)} \quad x^2 - y^2 = 0,$$

$$\text{(B.3)} \quad (x + y)^2 = 0,$$

$$\text{(B.4)} \quad x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

La curva di equazione (B.2) è costituita da tutti i punti di due rette, precisamente le due bisettrici degli assi; la curva di equazione (B.3) contiene i punti di una sola delle bisettrici degli assi; non vi è nessun punto le cui coordinate soddisfacciano l'equazione (B.4), che quindi definisce l'insieme vuoto.
Nei casi (B.2), (B.3) il polinomio di secondo grado al primo membro dell'equazione è "*riducibile*", cioè si può scrivere come prodotto di due polinomi di primo grado; anche la curva si chiama *riducibile*, oppure *spezzata*, perché è costituita da due rette (anche coincidenti). Il caso (B.4) è uno degli interessanti casi *patologici* che aiutano a comprendere perché si siano cercati degli ampliamenti del campo reale nei quali fosse garantita l'esistenza di soluzioni per qualsiasi equazione algebrica, giungendo alla costruzione del campo dei numeri complessi e, in seguito, alla nascita della Geometria algebrica complessa.

Ci sono mezzi per riconoscere quali equazioni di tipo (B.1) definiscano delle "non-curve" come nei casi speciali (B.2), (B.3),(B.4)? Per risolvere questo problema, ricorriamo all'idea che sta alla base del metodo delle coordinate: essendo del tutto arbitraria la scelta del sistema di riferimento (beninteso, di un tipo fissato, che per il nostro studio è il tipo ortogonale

monometrico), conviene sfruttarla in modo di ottenere il maggior numero di semplificazioni delle equazioni che rappresentano gli oggetti geometrici.
Un cambiamento di coordinate (A.2") agisce sull'equazione (B.1) trasformandola in una diversa equazione di secondo grado nelle nuove coordinate: $a'_{11}(x')^2+\dots\dots = 0$. Vogliamo trovare se ci siano dei caratteri delle due equazioni che si conservano nei cambiamenti di coordinate, così come si conserva la forma della curva ellisse (che non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, ma dalla distanza focale e dalla lunghezza dell'asse maggiore). Questi caratteri sono appropriatamente detti *"invarianti"* della curva, definita dalla (1).
Osserviamo che la (B.1) può essere scritta in altri modi:

I. ponendo $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$, si ottiene

(B.1') $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \mathbf{X}^\mathbf{T}\mathbf{A_0}\mathbf{X} + 2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{X} + a_{33} = 0,\ \mathbf{A_0} = \mathbf{A_0^T}$

II. detta **A** la matrice **simmetrica** dei coefficienti $a_{ik}$ dell'equazione (B.1) si ha:

(B.1") $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\mathbf{T} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathbf{T}.$

Lasciamo al corso di Algebra Lineare il compito di dimostrare il
**Teorema:** *un cambiamento di coordinate cartesiane ortogonali monometriche* (A.2) *trasforma l'equazione di secondo grado* (B.1'), *o* (B.1"), *in un'altra equazione di secondo grado*

$$\mathbf{X}'^\mathbf{T}\mathbf{A}'_0\,\mathbf{X}' + 2\mathbf{B}'^\mathbf{T}\,\mathbf{X}' + a'_{33} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'^\mathbf{T} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}' \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$ , con $\mathbf{A_0}=\mathbf{A_0}^\mathbf{T}$**,** $\mathbf{A}=\mathbf{A}^\mathbf{T}$

*lasciando invariati*

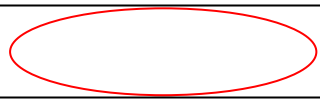
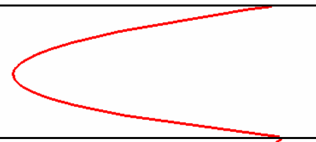
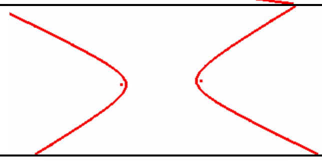
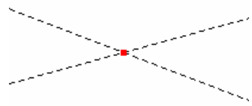
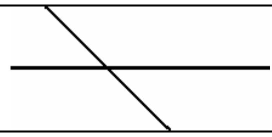
1. *il rango della matrice dei coefficienti:* rango(**A**) = rango(**A'**)
2. *il segno del determinante della matrice dei coefficienti dei termini di secondo grado (complemento algebrico dell'elemento di posto* 3,3), *cioè si ha*
$$\det(\mathbf{A_0}) = \mathbf{A}_{33} > 0, = 0, < 0 \text{ se e solo se } \det(\mathbf{A}'_\mathbf{0}) = \mathbf{A}'_{33} > 0, = 0, < 0$$
3. *l'eventuale annullarsi della traccia di* $\mathbf{A_0}$*, cioè*
$$a_{11} + a_{22} = 0 \quad \text{se e solo se } a'_{11} + a'_{22} = 0.$$

## 2.C. Il teorema di classificazione.

Con ragionamenti non complicati, che però non abbiamo tempo di esporre qui, si può far vedere che proprio *a seconda del segno di* $\boldsymbol{A}_{33}$ *e del valore del rango di* **A** , è possibile trovare un sistema di riferimento in cui una data curva del secondo ordine abbia una equazione particolarmente semplice, che diremo "canonica"; in particolare, si trova che se **A** ha rango massimo, allora le possibili forme canoniche sono quelle delle coniche classiche (ellisse, parabola, iperbole). Le curve del secondo ordine vengono dunque chiamate **coniche,** e risultano giustificate le definizioni e la classificazione che seguono.

**Definizione:** *se è* rango(**A**) = 3, *la curva del secondo ordine (conica) si dice non degenere, o irriducibile, o non specializzata. Se è* rango(**A**) = 2, *la conica è detta semplicemente specializzata, se è* rango(**A**) = 1, *doppiamente specializzata.*

**Il teorema di classificazione delle coniche** è riassunto dalla tabella:

| **rango (A)** | $A_{33}$ | **nome** | **Equazione canonica** | **Forma** |
|---|---|---|---|---|
| 3 | > 0 | Ellisse | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ |  |
| | | | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ ellisse immaginaria | Insieme vuoto |
| | = 0 | Parabola | $y^2=2px$ |  |
| | < 0 | Iperbole | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ |  |
| 2 | >0 | Punto | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ rette complesse coniugate, incidenti in (0,0) |  |
| | = 0 | Rette parallele | $y^2=a^2$ |  |
| | | | $y^2+a^2=0$ rette immaginarie parallele | Insieme vuoto |
| | < 0 | Rette incidenti | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ |  |
| 1 | | Retta doppia | $y^2=0$ |  |

**Definizione.** Un’iperbole è chiamata *equilatera* se i suoi asintoti sono perpendicolari. Nell’equazione canonica è allora $a = b$.

Se si sceglie il riferimento facendo coincidere gli assi delle coordinate con gli asintoti dell’iperbole equilatera, allora la sua equazione è, per $k$ diverso da 0,

$$xy = k.$$

**Si dimostra che** *la* (B.1) *definisce un’iperbole equilatera se e solo se* **A** *ha rango massimo e*

$$a_{11}+a_{22}=0.$$