Sull'uso dei determinanti in Geometria analitica.

Proprietà dei determinanti.

Le osservazioni che seguono sono di complemento al paragrafo 6 del capitolo 3 di [testo]; possono essere trovate in P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare,* Zanichelli, cap. 5, n. 3.

Ricordiamo (vedi [testo], pag. 102) che si chiama "*trasposta*" di una matrice $\mathbf{A}$ di tipo (m,n) la matrice di tipo (n,m), che si indica con $\mathbf{A}^T$**,** ottenuta da $\mathbf{A}$ scambiando le righe con le colonne: se è $\mathbf{A} = (a_{ik})$, allora è $\mathbf{A}^T = (a_{ki})$, per i = 1,2,…,m, k = 1,2,…,n.

Per matrici quadrate degli ordini 2, 3 si verifica facilmente che valgono le proprietà enunciate dalla proposizione che segue, della quale **omettiamo la dimostrazione**.

Proprietà dei determinanti. *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice quadrata di ordine* n, con righe $\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2,\dots,\mathbf{a}^n$.

1. *Se in* $\mathbf{A}$ *si scambiano due righe, il determinante cambia di segno,*
2. *se una qualunque riga è moltiplicata per uno scalare k, il determinante viene moltiplicato per k,*
3. *se* $\mathbf{a}^i = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, *detta* $\mathbf{B}$ *la matrice che si ottiene da* $\mathbf{A}$ ***sostituendo*** *la riga i-esima con* $\mathbf{u}$, *e chiamata* $\mathbf{C}$ *la matrice che si ottiene da* $\mathbf{A}$ ***sostituendo*** *la riga i –esima con* $\mathbf{v}$, si ha det($\mathbf{A}$) = det($\mathbf{B}$) + det($\mathbf{C}$),
4. det($\mathbf{A}$) = det($\mathbf{A}^T$).

Corollario 1. *Se nella matrice* $\mathbf{A}$ *ci sono due righe uguali, allora* det($\mathbf{A}$) = 0.
Dimostrazione: per la proprietà 1, scambiando le due righe il determinante cambia nel suo opposto, ma siccome le righe sono uguali, il determinante non cambia, quindi è l'unico numero uguale al suo opposto, cioè 0.

C.v.d.

Corollario 2. *Se ad una riga* $\mathbf{a}^i$ *si sostituisce il vettore riga* $\mathbf{a}^i + k\,\mathbf{a}^j$ (k scalare), *per* $j \neq i$, *il determinante non cambia.*
Dimostrazione. Per la proprietà 3, il determinante della nuova matrice è la somma di det($\mathbf{A}$) e del determinante di una matrice $\mathbf{C}$**,** in cui la riga i-esima è un multiplo della riga j-esima; per la proprietà 2 e per il corollario 1, det($\mathbf{C}$) = 0, quindi il determinante della nuova matrice è uguale a det($\mathbf{A}$).

C.v.d.

Corollario 3. *Sia* $\mathbf{S}$ *una matrice a scalini ottenuta da* $\mathbf{A}$**,** *per mezzo di un procedimento di eliminazione di Gauss; allora* det($\mathbf{A}$) = 0 se e solo se det($\mathbf{S}$) = 0.
Dimostrazione. Un procedimento di eliminazione di Gauss consiste nell'applicazione ripetuta di

a) scambio di righe: questa operazione, per la proprietà 1, cambia di segno il determinante
b) moltiplicazione di una riga per uno scalare k diverso da zero: per la proprietà 2, questa mossa ha l'effetto di moltiplicare il determinante per lo scalare k
c) sostituzione di una riga $\mathbf{a}^i$ con $\mathbf{a}^i + k\,\mathbf{a}^j$, che per il corollario 2 non altera il determinante.

In conclusione, esiste uno scalare *h*, diverso da 0, per cui

$$\det(\mathbf{A}) = h \det(\mathbf{S});$$

quindi se uno dei due determinanti è nullo, lo è anche l'altro.

C.v.d.

Ricordiamo (vedi [testo], pag. 120, definizione 3.9) che si chiama "*singolare*" una matrice quadrata di ordine n il cui rango sia minore di n.

Corollario 4. A *è singolare se e solo se* det(**A**) = 0.
Dimostrazione. Se **A** è singolare, una sua forma a gradini **S** contiene almeno una riga di zeri, e quindi det(**S**) = 0; per il corollario 3, anche det(**A**) = 0.
Viceversa, se det(**A**) = 0, per il corollario 3 anche il determinante di una sua riduzione a scalini è uguale a zero; ma allora il numero dei pivots è minore dell'ordine della matrice, e quindi il rango di **A** non è il massimo possibile.

C.v.d.

Corollario 5. *Le proprietà del determinante relative alle righe di una matrice sono valide anche per le colonne.*
Dimostrazione. Per la proprietà 4, il determinante non cambia se si scambiano le righe con le colonne; quindi le proprietà 1, 2, 3 e quelle di cui nei corollari 1, 2 valgono anche per le colonne.

C.v.d.

Corollario 6. det(**A**) = 0 *se e solo se le sue righe o le sue colonne sono vettori linearmente dipendenti.*
Dimostrazione. La condizione di dipendenza lineare tra le colonne di **A** conduce al sistema lineare omogeneo **AX = 0**, che ha soluzione non banale se e solo se il rango di **A** non è massimo, ovvero, per il corollario 4, se e solo se det(**A) =** 0.
Per la proprietà 4. poiché le righe di **A** sono le colonne di $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$**,** si può ripetere il ragionamento precedente sostituendo ad **A** la sua trasposta.

C.v.d.

Applicazioni geometriche del determinante.

1. Volume del parallelepipedo.

Fissiamo nello spazio un riferimento cartesiano ortogonale, e come d'uso indichiamo con **i, j, k** i versori degli assi. Dati due vettori **u** = (a,b,c), **v** = (a',b',c'), ricordiamo che le componenti del loro prodotto vettoriale $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ si ricavano utilizzando le proprietà del prodotto vettoriale (vedi [testo], cap. 2, n. 3.12, pag. 60)**.** Allargando la nozione di determinante ad una matrice "mista" (cioè, i cui elementi sono vettori in una riga, scalari nelle altre due) si ottiene, tramite lo sviluppo di Laplace, il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei versori fondamentali:

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \mathbf{i}(bc'-b'c)+\mathbf{j}(ca'-ac')+\mathbf{k}(ab'-a'b).$$

Preso un terzo vettore **w = (**a'',b'',c''), il suo prodotto scalare con $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è dato, quindi, da un determinante "ortodosso" (si sviluppi secondo la terza riga):

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo (si veda [testo] cap. 1, Def. 5.9, pag. 36) che $|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|$ è l'area del parallelogrammo di lati **u, v,** e che, dato un versore **n,** $|\mathbf{n}\bullet\mathbf{w}|$ è la misura della proiezione ortogonale di **w** sulla direzione di **n** ([testo], cap. 1, Def. 5.1, pag. 33, cap. 2, E.3.3, pag. 63). Se i tre vettori **u,v,w** non appartengono allo stesso piano, essi determinano un unico parallelepipedo P, di cui possiamo calcolare il volume come prodotto dell'area |**u**∧**v**| di una faccia per l'altezza relativa a quella faccia, cioè per |**n**•**w**|, con $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|}$. Si ha quindi:

$$vol(\mathrm{P}) = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| \, \frac{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|} = \left| \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \right| .$$

Da questa interpretazione del determinante come volume (a meno del segno) si può ricavare una diversa dimostrazione del **corollario 6**, per il caso di matrici di ordine 3.

2. **Equazione del piano e condizione di complanarità.**
Dato un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, il piano passante per P_0 e parallelo ai vettori **u, v** ha come direzione normale quella di **n** = **u**∧**v** e quindi (vedi [testo], cap. 2, n. 5, pag. 78-79) ha equazione

$$\mathbf{n} \bullet (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0, \ \text{ cioè } \ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \bullet (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0 .$$

Dalle considerazioni precedenti si ricava quindi la **equazione del piano** per P_0 e parallelo ai vettori **u, v in forma di determinante**:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0 .$$

Ricordiamo che se tre punti *A*, *B*, *C* non sono allineati, essi determinano un piano, che è parallelo ai vettori $\mathbf{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \mathbf{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$; il piano dei punti *A*, *B*, *C* ha quindi l'equazione

$$\det \begin{pmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 0 .$$

Se ne deduce la **condizione di complanarità** per 4 punti: i punti *A*,*B*,*C*,*D* appartengono ad uno stesso piano se e solo se è

$$\det \begin{pmatrix} x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 0 .$$

In modo analogo, si ha che, nel piano riferito a coordinate *x*,*y*, l'equazione della retta per i punti distinti *A*, *B* è

$$\det \begin{pmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{pmatrix} = 0.$$

Come esercizio (da non trascurare!), ragionando in analogia al caso della complanarità, si trovi la condizione di allineamento di tre punti nel piano.