Osservazioni sul compito d'esame del 12 settembre 2008.

Riguardo al terzo punto dell'esercizio 3

3. Nello spazio, sono dati la retta s di equazioni $\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$ ed il punto $R = (2,0,-1)$.

a) Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene s ed R.
b) Scrivere un'equazione del piano che contiene R ed è perpendicolare a s.
c) Rappresentare in forma cartesiana la retta che passa per R ed è perpendicolare ed incidente ad s.

La retta che passa per R ed è incidente e perpendicolare a s appartiene al piano di s ed R, *trovato rispondendo al quesito a*, ed appartiene al piano perpendicolare a s passante per R, *trovato rispondendo al quesito b*: quindi le sue equazioni cartesiane si ottengono mettendo in un sistema le equazioni trovate rispondendo ai primi due quesiti.
Un altro modo di risolvere lo stesso esercizio può essere: scrivere le equazioni di una retta determinata da R e da un punto generico di s , cioè un punto di coordinate $(1+t,t,t)$:

$$\frac{x-2}{1-t} = \frac{y}{-t} = \frac{z+1}{-1-t}$$

Questa retta è perpendicolare a s se è $(1,1,1) \bullet (1-t,-t,-1-t) = 0$.
Per $t=0$ si ricava la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y=0 \\ x-2+(z+1)=0. \end{cases}$$

Riguardo all'esercizio 4.

4. Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono dati il punto F di coordinate $(1,2)$ e la retta d di equazione $x + 2y + 5 = 0$.
a) Trovare l'asse a ed il vertice V della parabola P che ha F come fuoco e d come direttrice.
c) Scrivere un'equazione che rappresenti P nel sistema di coordinate dato (senza svolgere calcoli!).
d) Scrivere un'equazione che rappresenti P nel sistema di riferimento in cui V è l'origine delle coordinate e a è l'asse delle x.

E' simile all'esercizio 4 e all'es. 3 del n. 7, intitolato "Coniche", negli appunti del corso, in
http://www.mat.unical.it/~daprile/materiali/geo_primanno_08/7_Coniche.pdf
Dati il fuoco e la direttrice della parabola, è implicitamente dato l'asse della parabola, perché è la retta perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco; il vertice della parabola è il punto medio tra il fuoco e l'intersezione della direttrice con l'asse.

Riguardo all'esercizio 5.

5. Esaminare le curve che sono le sezioni della quadrica Q di equazione

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

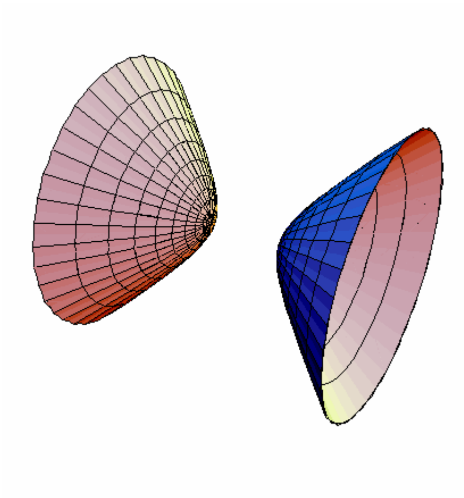
con piani paralleli ai piani coordinati; in base ai risultati ottenuti, stabilire se Q sia un iperboloide ad una falda oppure a due falde, e se sia una quadrica rotonda (cioè, che si possa ottenere facendo ruotare una conica intorno ad un suo asse di simmetria).

E' simile all'esercizio 9 del terzo paragrafo del n. 8 "Superfici e curve nello spazio", negli appunti del corso:
http://www.mat.unical.it/~daprile/materiali/geo_primanno_08/8_Superfici.pdf
Intersecando con i piani paralleli al piano degli assi y e z si trovano le coniche di equazioni

$$\begin{cases} x=k \\ y^2+z^2=k^2-1 \end{cases}$$

che hanno punti reali per $|k| > 1$, e, in tali casi, sono circonferenze, con il centro sull'asse delle x. Se ne deduce che i punti della quadrica sono esterni alla striscia $-1 < x < 1$, quindi la

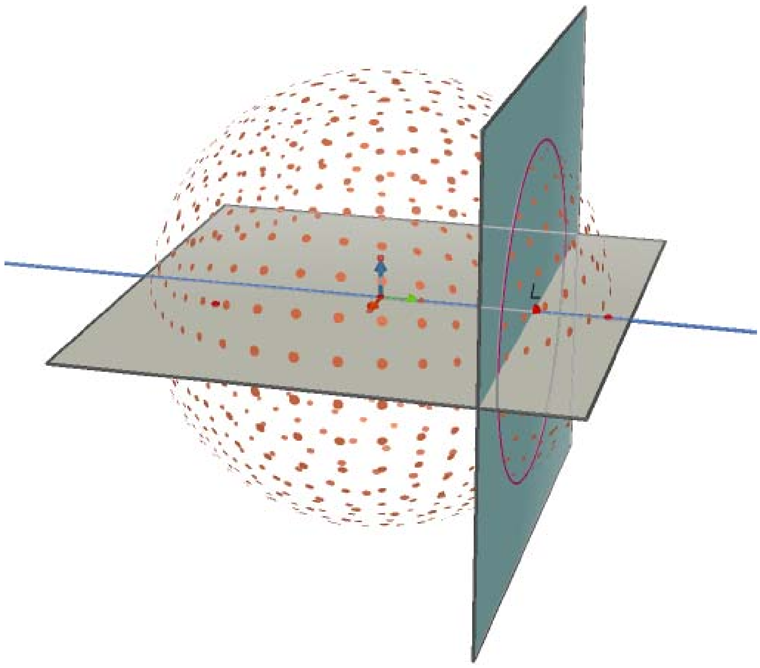
quadrica è a due falde; inoltre, contenendo infinite circonferenze, con i centri su uno dei suoi assi di simmetria e giacenti nei piani perpendicolari ad esso, è una quadrica rotonda.
La figura ne riproduce un pezzo



Riguardo all'esercizio 6

6. Scrivere un'equazione che rappresenti la superficie sferica Σ che passa per i punti $M = (\sqrt{7}/2, 0, 1/2)$, $N = (0,1,1)$ e che sul piano $y = 1$ taglia una circonferenza con centro in $L = (0,1,0)$.

Il centro della sfera si trova sulla perpendicolare in L al piano $y = 1$, quindi si trova sull'asse delle y; ha pertanto coordinate $(0, c, 0)$.



Il centro deve avere ugual distanza dai punti M, N quindi deve essere $\frac{7}{4}+c^2+\frac{1}{4}=(c-1)^2+1$, ovvero $c = 0$. La sfera ha dunque centro nell'origine e raggio uguale alla distanza dall'origine di M oppure N.