

**E' consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. Non è consentito ritirarsi o uscire prima che sia trascorsa una ora e mezza dell'inizio della prova.**

**Scrivere nome, cognome, numero di matricola, corso di laurea in testa ad ogni foglio.**

**Nome e cognome..... N. matricola..... Corso di laurea .....**

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche  $x, y, z$ , si consideri la retta  $r$  di equazioni parametriche, nel parametro reale  $t$ ,

$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

- a) Verificare che il punto  $Q = (3, 0, 3)$  non appartiene ad  $r$  e trovare un'equazione che rappresenti il piano per  $r$  e per  $Q$ .  
b) Rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta  $r'$  che passa per  $Q$  ed è parallela ad  $r$ .  
c) Rappresentare in forma cartesiana il fascio dei piani che sono paralleli sia alle rette  $r$  ed  $r'$  che all'asse delle  $z$ .  
(6 punti)

2. a) Discutere e, per i valori del parametro  $h$  per cui è possibile, trovare tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + 2z = h \\ x + y = 2h \\ x - 2y + 3z = 2 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}.$$

- b). Chiamiamo  $r(h)$  la retta di equazioni  $\begin{cases} x - y + 2z = h \\ x + y = 2h \end{cases}$ , ed  $s$  la retta di equazioni  $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$ . Utilizzare i risultati

ottenuti sopra per rispondere alle domande che seguono, motivando brevemente ogni risposta (le risposte prive di motivazione non vengono valutate).

- (i) Esistono dei valori di  $h$  per cui  $r(h)$  e  $s$  sono sghembe?  
(ii) Esistono dei valori di  $h$  per cui  $r(h)$  e  $s$  sono parallele?  
(iii) Esistono dei valori di  $h$  per cui  $r(h)$  e  $s$  sono incidenti?

(3+3 punti)

3. a) Per quali valori del parametro  $k$  la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  è invertibile?

b) Per i valori di  $k$  per cui è possibile, esprimere uno, tra i vettori  $\mathbf{a} = (2, 2, 5)$ ,  $\mathbf{b}(k) = (k, 1, 2)$ ,  $\mathbf{c} = (0, 1, 3)$ , come combinazione lineare degli altri.

(1+3)

4. Una delle equazioni che seguono rappresenta una ellisse con il centro nel punto  $(1, 0)$ : quale? Indicare succintamente il ragionamento fatto per riconoscerla.

$$a) x^2 - 2y^2 = 1; \quad b) 2x^2 + 4y^2 = 9; \quad c) x - y^2 = 0; \quad d) (x-1)^2 + 4y^2 = 36.$$

Trovare i quattro vertici e delle equazioni parametriche di quella ellisse.

(4 + 2)

5. a) Scrivere un'equazione del piano tangente alla sfera  $\xi$  di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 18z = 0$$

nel punto, diverso dall'origine delle coordinate, in cui essa incontra l'asse delle  $x$ .

b) Spiegare perché l'intersezione del piano  $y = 2$  con  $\xi$  non è vuota, anzi è una circonferenza  $\mathcal{C}$ ,

c) rappresentare  $\mathcal{C}$  con equazioni cartesiane.

d) Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per il cilindro con generatrici parallele all'asse delle  $y$  che taglia sul piano  $y = 2$  la circonferenza  $\mathcal{C}$ .

(2 + 2 + 2 + 2)