Esempio di soluzione di una delle versioni della prova scritta di Geometria lineare e affine (Geometria analitica) dell'11 luglio 2008

1.A. Determinare per quali valori dei parametri *h, k* sia compatibile il sistema lineare, nelle incognite *x,y,z*

$$\begin{cases} x-y-3z=-1 \\ x+y-(1+k)z=-1-h(1+k) \\ x-z=-h \end{cases}.$$

B. Per quei valori di *h,k* per cui il sistema ammette infinite soluzioni, trovare le soluzioni.

C. Indichiamo con π il piano di equazione $x - y - 3z = -1$ e con $r(h,k)$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+y-(1+k)z=-1-h(1+k) \\ x-z=-h \end{cases}$. Utilizzare i risultati ottenuti in A) per rispondere alle domande:

(i) Esistono valori di *h, k* per cui il piano π e la retta $r(h,k)$ sono incidenti in un solo punto?
(ii) Esistono valori di *h, k* per cui il piano π e la retta $r(h,k)$ sono paralleli in senso stretto (cioè, non hanno punti in comune)?
(iii) Esistono valori di *h, k* per cui il piano π contiene la retta $r(h,k)$? In caso affermativo, quali sono i parametri direttori della retta?

(punti 2.5+1+3.5)

1.A. Per ottenere la riduzione a scalini della matrice completa del sistema cominciamo a lavorare sulla prima colonna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -(1+k) & -1-h(1+k) \\ 1 & 0 & -1 & -h \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -k+2 & -h(1+k) \\ 0 & -1 & -2 & -1+h \end{array}\right).$$

Moltiplicando la terza riga per 2 e aggiungendola alla seconda, si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -k+2 & -h(1+k) \\ 0 & 0 & -k-2 & -hk+h-2 \end{array}\right).$$

Il rango della matrice incompleta è uguale a 3 per $k \neq -2$. Per questi valori di *k*, il rango della matrice completa è uguale a quello della matrice incompleta.

Se è $k = -2$, la matrice incompleta ha rango uguale a 2 e la matrice completa ha lo stesso rango per

$$2h + h - 2 = 0, \text{ cioè per } h = 2/3.$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, si conclude che il sistema è compatibile:

- per $k \neq -2$ e *h* ***qualsiasi,*** ed ammette una sola soluzione, per ogni scelta di *h,* e di *k*, purché diverso da 2
- per $k = -2$, $h = 2/3$, con infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Il sistema è incompatibile per $k = -2$, $h \neq 2/3$.

B. Ponendo $k = -2$, $h = 2/3$ nella matrice completa ridotta a scalini, si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}(-1) \end{pmatrix},$$

che, divisa la seconda equazione per 2, equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3z \\ \frac{1}{3}-2z \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono $(t-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}-2t, t)$, al variare di *t* nei numeri reali.

C. (i) Per $k \neq -2$ e *h* ***qualsiasi,*** il piano π e la retta $r(h,k)$ sono incidenti in un solo punto, perché il sistema ammette una sola soluzione.

(ii) Il piano π e la retta $r(h,k)$ sono paralleli in senso stretto per $k = -2$, $h \neq 2/3$, perché allora il sistema non ha soluzioni.

(iii) Il piano π contiene la retta $r(h,k)$ se è $k = -2$, $h = 2/3$; da B) si ricava che la retta ha parametri direttori (1,–2,1).

2. Si considerino i vettori di R^3

$$\mathbf{u} = (-1,1,-1),\ \mathbf{v}(p) = (p,1,2) \text{ (con } p \text{ numero reale)},\ \mathbf{w} = (-1,1,2).$$

Determinare p in modo che i tre vettori siano linearmente dipendenti e, per quel valore di p, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

(punti 1+2)

Per definizione, i vettori **u,v,w** sono linearmente dipendenti se esistono degli scalari x,y,z **non tutti nulli** per i quali sia $x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{0}$, cioè se e solo se il sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} -1 & p & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette autosoluzioni. Riduciamo a scalini la matrice del sistema: si può cominciare (non è l'unico modo, e forse non il più veloce, il lettore provi altre scelte) con

$$\begin{pmatrix} -1 & p & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & p & -1 \\ 0 & p+1 & 0 \\ 0 & 2-p & 3 \end{pmatrix};$$

se è $p \neq -1$, sostituendo alla terza riga la differenza tra la terza riga moltiplicata per $p + 1$ e la seconda moltiplicata per $2 - p$, si arriva alla forma

$$\begin{pmatrix} -1 & p & 1 \\ 0 & p+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3(p+1) \end{pmatrix}.$$

Quindi, se è $p \neq -1$, essendo uguale a tre il rango della matrice del sistema omogeneo, i vettori dati sono linearmente indipendenti.

Nel caso in cui sia $p = -1$ il sistema è

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{, equivalente a } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ cioè } \begin{cases} x + y = -z \\ y = -z \end{cases}.$$

Posto $z = t$, si ricava $y = -t$, $x = 0$ e quindi

$$0\mathbf{u} - t\mathbf{v} + t\mathbf{w} = \mathbf{0}\text{, per ogni } t\,;$$

in conclusione, si può scrivere

$$\mathbf{v}(-1) = \mathbf{w}.$$

3. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono dati i punti

$$A = (2,0,-1),\quad B = (-1,0,1),\quad C = (0,-1,1).$$

(a) Rappresentare la retta dei punti A, B in forma parametrica e con equazioni cartesiane.
(b) Verificare che i punti A, B, C non sono allineati e scrivere un'equazione del piano che li contiene.
(c) Scrivere delle equazioni cartesiane per la retta che passa per C ed è parallela alla retta dei punti A, B.

(punti 2+2+1)

(a) In forma parametrica, nel parametro t

$$x = 2 - 3t,\ y = 0,\ z = -1 + 2t$$

e in forma cartesiana

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2(x-2) + 3(z+1) = 0 \end{cases}.$$

(b) Poiché tutti i punti della retta AB hanno la coordinata y uguale a zero, mentre C ha la seconda coordinata diversa da zero, i tre punti non sono allineati. Nel fascio di piani che ha per sostegno la retta AB

$$\lambda y + \mu(2(x-2) + 3(z+1)) = 0$$

quello che contiene il punto C si ottiene per

$$-\lambda + \mu\,(2(-2)+3(1+1)) = 0, \text{ cioè } -\lambda + \mu\ 2 = 0.$$

Il piano dei tre punti è quello determinato da $\lambda = 2$, $\mu = 1$, quindi ha equazione

$$2y + 2(x-2) + 3(z+1) = 0.$$

(c) La retta per C parallela alla retta AB ha equazioni parametriche

$$x = -3\,t\,,\ \ y = -1,\ z = 1 + 2\,t$$

e cartesiane

$$\begin{cases} y = -1 \\ 2x + 3(z-1) = 0 \end{cases}.$$

4. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono dati il punto $X = (0,-1,1)$ ed il piano α di equazione $-x + y - 2\,z = 3$. Trovare le coordinate del punto X' che è la proiezione ortogonale di X su α. (punti 3)

La retta per X perpendicolare al piano α, avendo come vettore direttore un vettore normale al piano (ad esempio, il vettore $(-1,1,-2)$), ha equazioni parametriche, nel parametro s,

$$(*)\ \ x = -s,\ \ y = -1 + s,\ \ z = 1 - 2\,s.$$

Il punto X' è l'intersezione di questa retta con il piano α; si ottiene per il valore del parametro s che è radice dell'equazione

$$-(-s) + (-1+s) - 2\ (1 - 2s) = 3$$

cioé

$$s\ (6) = 6.$$

Per $s = 1$ si ottengono dalle equazioni (*) le coordinate di X': $(-1,0,-1)$.

5. Chiamiamo S la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2-x-2y+z = 0$.
(a) Rappresentare in forma cartesiana la circonferenza C tagliata su S dal piano che passa per il centro di S ed è parallelo agli assi delle coordinate x e y. (b) Trovare un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche del cilindro che passa per C ed ha generatrici parallele all'asse delle z.
(punti 2+3)

(a) L'equazione di S si può riscrivere nella forma $(x-1/2)^2+(y-1)^2+(z+1/2)^2=(1/2)^2+1^2+(1/2)^2$, da cui si legge che il centro è $(1/2,1,-1/2)$ ed il raggio è $\sqrt{3/2}$.

Il piano parallelo agli assi delle coordinate x, y per il centro di S è il piano $z = -1/2$. Esso taglia la sfera in una circonferenza C massima (cioè, che ha lo stesso centro e lo stesso raggio di S). C è individuata dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} z = -1/2 \\ (x-1/2)^2+(y-1)^2+(z+1/2)^2 = 3/2 \end{cases}.$$

(b) Come conseguenza delle equazioni di C, eliminando la z, si ricava l'equazione della superficie

$$(x-1/2)^2+(y-1)^2 = 3/2$$

che rappresenta un cilindro con generatrici parallele all'asse delle z, il quale contiene, oltre alla circonferenza C, anche la sua proiezione ortogonale sul piano $z = 0$, che è la circonferenza di questo piano con centro $(1/2,1,0)$ e raggio $\sqrt{3/2}$.

Le equazioni parametriche del cilindro sono pertanto

$$x = 1/2+\sqrt{3/2}\cos\vartheta,\ y = 1+\sqrt{3/2}\sin\vartheta,\ z = \psi\ ,$$

al variare dei parametri reali ϑ, ψ.

6. E' data nel piano una famiglia di coniche, le cui equazioni dipendono dal parametro reale k $k^2(x-k)^2+(y+3k)^2 = k^2$. Per ciascuna delle affermazioni che seguono, spiegare brevemente i motivi[1] per cui è, o non è, corretta.
a) La famiglia contiene una sola conica degenere (o specializzata, riducibile) formata da due rette incidenti, distinte. b) Le coniche non degeneri della famiglia sono tutte delle ellissi.

[1] la risposta "vero" o "falso" priva di motivazioni è valutata 0 punti, anche se esatta.

c) Gli assi coordinati coincidono con gli assi di simmetria di tutte le coniche non degeneri della famiglia.
d) Tra le coniche della famiglia vi è una sola circonferenza, di raggio uguale a 1 e centro (–1,–1).
e) I centri delle coniche della famiglia appartengono tutti ad una retta.

Facoltativo: trovare un'equazione del luogo dei centri delle coniche della famiglia.

(punti 7++)

a) Il determinante della matrice dei coefficienti delle equazioni è

$$\begin{vmatrix} k^2 & 0 & -k^3 \\ 0 & 1 & 3k \\ -k^3 & 3k & k^4+9k^2-k^2 \end{vmatrix} = k^2(k^4+9k^2-k^2+9k^2)-k^6=-k^4$$

Si ha un'unica conica degenere, per k = 0, e precisamente la conica di equazione $y^2 = 0$, che è costituita da una retta contata due volte. L'affermazione a) risulta quindi falsa, perché l'unica conica degenere della famiglia è formata da una retta doppia (o, se si preferisce, due rette coincidenti).

b) L'invariante $\mathbf{A}_{33}$ vale k^2, quindi è positivo per ogni valore di k diverso da zero: le coniche non degeneri sono tutte delle ellissi, quindi l'affermazione è vera.

c) Le coniche non degeneri della famiglia sono tutte coniche a centro, ma questo centro non coincide con l'origine delle coordinate, perché se così fosse le equazioni non conterrebbero termini di primo grado in x ed y; pertanto gli assi di simmetria (che passano per il centro) di ciascuna conica non possono coincidere con gli assi coordinati: l'affermazione è falsa.

d) Il coefficienti dei termini in x^2, y^2 sono uguali per $k^2 = 1$, cioè per $k = \pm 1$, quindi le circonferenze della famiglia sono due, ed hanno raggio uguale ad 1. L'affermazione non è vera, perché le circonferenze sono due e anche perché i centri hanno ordinata diversa dall'ascissa.

e) L'affermazione è vera: i centri hanno coordinate $x = k$, $y = -3k$, quindi appartengono ad una retta, quella di equazione cartesiana $y = -3x$.