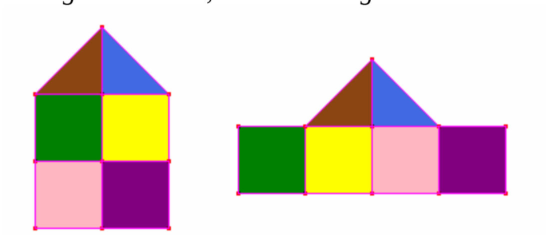
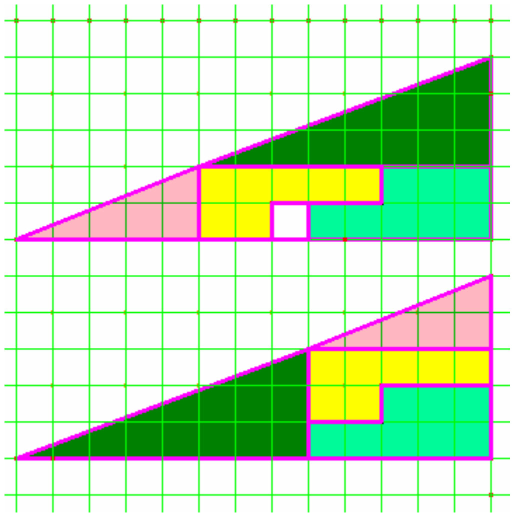
NOTA. Con [testo] indicheremo sempre il libro
S. Abeasis, *Geometria analitica del piano e dello spazio*, Zanichelli, 2002.
Per svolgere gli esercizi che seguono è necessario conoscere gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 1 e cap. 2, n. 1, 3.

0. Esercizi sui prerequisiti di geometria del piano e dello spazio

1. Che cosa significa la frase: "le rette *r, s* sono parallele"?
2. Possono esserci, nello spazio, due rette che **non** hanno punti in comune e **non** sono parallele?
3. Che cosa significa la frase: "le rette incidenti *a, b* sono ortogonali (perpendicolari)"?
4. In un piano, consideriamo due rette incidenti *r, s* e due rette *r', s',* con *r'* parallela a *r, s'* parallela a *s.* C'è qualche relazione tra gli angoli formati da *r* ed *s* e quelli formati da *r'* e *s'* ? **Motivare** ogni affermazione!
5. In un piano, consideriamo due rette parallele *r, s.* Prendiamo poi una retta *t* che è parallela a *s;* può accadere che *t* intersechi *r?* Perché? Siano *h, k,* due rette che intersecano *r.* E' possibile che *h* (oppure *k*) sia parallela ad *s* o a *t* ? Le rette *r, s, t* intercettano su *h, k* dei segmenti; conosci un teorema che riguarda questi segmenti? Sai enunciarlo?
6. Considera questa affermazione: *due figure piane che, come quelle nell'illustrazione qui sotto, possono essere decomposte in pezzi a due a due uguali tra loro, hanno aree uguali.*



Se l'osservazione precedente è vera, allora nel disegno qui sotto la figura più in basso ha area minore di quella in alto; o no? Dove è finito il quadratino bianco?



7. In un piano α, consideriamo due rette incidenti *r, s.* Prendiamo un punto *A* fuori di α. Quante sono le rette che passano per *A* e sono parallele a *r*? Chiamiamo *r' s'* le rette passanti per *A* che sono rispettivamente parallele a *r* e ad *s.* Che relazione c'è tra il piano α e il piano individuato da *r', s'* ? C'è qualche relazione tra gli angoli formati da *r* ed *s* e quelli formati da *r'* e *s'*? **Motivare** ogni affermazione!
8. Usando l'esercizio 7, giustificare la definizione (in [testo], pag. 9): "se le rette orientate *r* ed *s* sono sghembe, si assume come angolo [tra *r,s*] quello individuato dalle rette *r', s'* parallele ad *r* ed *s* ed equiorientate, condotte da un punto qualunque dello spazio".

9. Consideriamo un punto *P* ed una retta *r* che lo contiene. Quante sono le rette dello spazio che passano per *P* e sono perpendicolari a *r* ?
10. Che significa la frase "la retta *r* è perpendicolare al piano π"?

1. Vettori geometrici.

1. Disegnare un triangolo scaleno *AOB*. Considerare i vettori **a** = $\overrightarrow{OA}$, **b** = $\overrightarrow{OB}$. Disegnare i vettori: **b + a, b – a, (b – a) + a,** 2**a** – 3**b,** (–1/3)**(a + b).** Considerare sia il caso in cui l'angolo di vertice *O* è acuto sia il caso in cui è ottuso.
2. I punti *C,A,B* sono vertici consecutivi di un parallelogramma per il quale vale l'uguaglianza $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$: di che tipo di parallelogramma si tratta?
3. *ABCD* è un quadrato, e *O* è il suo centro (punto d'incontro delle diagonali). Scrivere il vettore $\overrightarrow{AO}$ come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.
4. *HKL* è un triangolo, *G* il suo baricentro, cioè il punto comune alle sue mediane. Esprimere il vettore $\overrightarrow{HG}$ come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{HK},\overrightarrow{HL}$. (Suggerimenti: il baricentro divide ogni mediana in segmenti che sono... quindi mandando dal baricentro la parallela ad un lato si dividono gli altri lati in parti che ...)
5. Dati tre punti distinti e non allineati *O, A, B*, chiamiamo *M* il punto medio tra *A* e *B*. Esprimere il vettore $\overrightarrow{OM}$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Cambia il modo di scrivere $\overrightarrow{OM}$ se *O, A, B* sono allineati?
6. Nel piano, riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali *Oxy*, si consideri il vettore **c** = (2,–3).
   a) Disegnare i vettori (1/2) **c**, (–3/4) **c** e scriverne le componenti.
   b) Sia **d** = (1,–3/2). Scrivere il vettore **0** come combinazione lineare dei vettori **c, d** in **due** modi <u>diversi</u>.
7. Nel piano, riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche *Oxy,* sono dati i punti *A* di coordinate (2,−4), *B* di coordinate (−1,3), *C* di coordinate (1/2,0). Trovare le componenti dei vettori che sono i traslati in *O* di $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$. Stabilire, senza ulteriori calcoli, se i punti *A, B, C* sono allineati.
8. In $\mathbb{R}^2$ sono assegnati il vettore **v** = (–3,2) ed il punto *A* = (2,−4). Determinare i punti *K, L* per cui il vettore $\overrightarrow{AK}$ sia traslato di **v**, nella traslazione che porta *O* in *A***,** e il vettore $\overrightarrow{LA}$ sia il traslato di 2**v**, nella traslazione di vettore $\overrightarrow{OL}$.
9. Nello spazio, è assegnato un sistema di coordinate cartesiane. Siano **i, j, k** i vettori di modulo unitario (versori) applicati nell'origine, con la direzione e verso degli assi del sistema cartesiano. E' possibile scrivere uno, tra **i, j, k,** come combinazione lineare degli altri due? Motivare la risposta! Descrivere gli insiemi dei vettori che sono combinazione lineare soltanto di *due* tra **i, j, k.** Quali vettori sono combinazione lineare soltanto di *uno* tra **i, j, k**?
10. E' vero o falso che se tre vettori giacciono in uno stesso piano allora **ciascuno** di essi si può ottenere come combinazione lineare degli altri due? Spiegare la propria risposta.
11. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati il vettore **w** = (–3,2,1) ed il punto *A* = (2,−4,0). Determinare i punti *K, L* per cui il vettore $\overrightarrow{AK}$ sia traslato di **w**, e il vettore $\overrightarrow{LA}$ sia il traslato di 2**w**.
12. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i punti *A* = (2,−4,0), *B* = (1,1,1). Trovare le componenti del vettore **u** che è traslato in *O* del vettore $\overrightarrow{AB}$.

2. Prodotto scalare e prodotto vettoriale.

1. In $\mathbb{R}^2$ è dato il vettore **h** = (4,–3). Determinare
   (a) il modulo di **h** ed i coseni degli angoli che **h** forma con i versori fondamentali **i, j**
   (b) le componenti di tutti i vettori che sono linearmente dipendenti da **h**
   (c) le componenti di tutti i vettori che sono perpendicolari a **h.**
2. Determinare le componenti di tutti i vettori perpendicolari al vettore **w** = 2 **i** – 3 **j**; verificare che esistono due versori perpendicolari a **w** e scriverne le coordinate**;** disegnare **w** e i due versori perpendicolari ad esso su un foglio di carta quadrettata.
3. Calcolare il prodotto scalare **u•v** ed |**u**∧**v|** in ciascuno dei seguenti casi:
   a. **u, v** sono versori che formano un angolo di 30°
   b. **u = –v**
   c. **i, j, k** sono i versori fondamentali in $\mathbb{R}^3$, **u = i + k, v = i – k.**
4. Sia **a** un vettore fissato (applicato nell'origine) nel piano. Descrivere l'insieme di tutti i vettori **v** del piano (applicati nell'origine) per cui **a•v =** 0. Disegnare tale insieme nel caso particolare **a** = (2,–3).
5. Sia **a** un vettore fissato (applicato nell'origine) nello spazio. Descrivere:
   a. l'insieme di tutti i vettori **v** (applicati nell'origine) per cui **a•v** = 0;
   b. l'insieme di tutti i vettori **v** (applicati nell'origine) per cui **a** ∧ **v** = **0**.
6. *ABC* è un triangolo equilatero di lato *l*. Calcolare $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$. Qual è la componente di $\overrightarrow{AB}$ secondo la retta orientata *CA* ?
7. Sono dati due vettori **a, b**, che soddisfano le seguenti condizioni: $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}, |\mathbf{b}| = 1, \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$. Calcolare il modulo del vettore 3 **a** – 2 **b**.
8. Nel piano sono assegnati i punti *P* = (1,2), *Q* = (–1,3), *R* = (2,2), *S* = (4,1). Stabilire se il quadrilatero *PQRS* è un parallelogrammo; in caso affermativo, se sia un rombo.
9. Che proprietà hanno tre vettori **a, b, c** se il loro "prodotto misto" **a•b**∧**c** è uguale a zero?
10. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    a. Scrivere i vettori **u + v, –w, u + (–w)** = **u – w**.
    b. Trovare il vettore che è la combinazione lineare di **u, v, w** con i coefficienti –3, 1, 4.
    c. Scrivere le componenti di tutti i vettori del sottospazio generato da **v, w.**
    d. Stabilire se **u, v, w** sono linearmente dipendenti.
    e. Calcolare |**u**|**,** il coseno dell'angolo tra **w** e **v**, le componenti di **u**∧**w.**
    f. Trovare le componenti dei due versori paralleli a **u.**
    g. Determinare i vettori che sono le proiezioni ortogonali di **u** su **v** e su **w.**
    h. Verificare che **u**∧(**v**∧**w**) è diverso da (**u**∧**v**)∧**w.**