Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 2, n. 2, 3, 4.

1. Equazioni parametriche di rette e di piani.

1. Rappresentare sia in forma vettoriale, sia con equazioni parametriche la retta che passa per l'origine e per il punto $A = (-2,1,2)$.
2. Rappresentare sia in forma vettoriale, sia con equazioni parametriche la retta r che passa per l'origine ed è parallela al vettore **c** = (2,5,–3) e la retta r' parallela a r che passa per $U = (1,1,1)$.
3. Scrivere delle equazioni parametriche per le rette determinate dalle seguenti coppie di punti:
   a) $A = (-2,1,2)$, $B = (2,4,1)$; b) $B = (2,4,1)$, $C = (2,5,-3)$; c) $B = (2,4,1)$, $D = (2,5,1)$.
4. Scrivere delle equazioni parametriche per: a) l'asse delle x (prima coordinata); b) la retta parallela all'asse delle z (terza coordinata) e passante per il punto $B = (2,4,1)$.
5. Rappresentare in forma vettoriale e con equazioni parametriche la retta che passa per il punto $A = (-2,1,2)$ ed è parallela alla retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-2t \\ z = 5+t \end{cases}$.
6. Rappresentare sia in forma vettoriale sia con equazioni parametriche
   a. il piano per l'origine determinato dai vettori **u** = (1,1,2), **v** = (2,0,–3)
   b. il piano per il punto (1,1,1) parallelo ai vettori **u** = (1,1,2), **v** = (2,0,–3)
   c. il piano per i punti (0,1,0), (1,0,0), (0,0,1).
7. Verificare (esaminando opportuni vettori) che i punti (1,1,1), (2,3,5), (4,1,2) non sono allineati e scrivere delle equazioni parametriche del piano che li contiene.
8. Verificare (esaminando vettori opportuni) che i punti (2,1,1), (0,1,0), (1,–2,3), (4,1,2) sono complanari e scrivere delle equazioni parametriche del piano che li contiene.

2. Uso del prodotto scalare e del prodotto vettoriale: rette orientate, angoli tra rette, aree.

1. Trovare il versore della retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-2t \\ z = 5+t \end{cases}$, orientata nel verso delle y crescenti.
2. Calcolare il coseno dell'angolo tra la retta r di equazioni (nel parametro t) $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$, orientata secondo il parametro t crescente, e la retta s di equazioni (nel parametro τ) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \tau \\ z = 3-2\tau \end{cases}$, orientata nel verso delle y crescenti.
3. Calcolare la componente del vettore **u** = (1,1,2) secondo la retta s di equazioni parametriche (nel parametro τ) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \tau \\ z = 3-2\tau \end{cases}$, orientata nel verso delle z crescenti.
4. Quanti sono i vettori ortogonali ad **u** = (1,1,2)? Scrivere le loro componenti. Tra i vettori ortogonali a **u,** determinare quelli che formano un angolo di $\pi/4$ con **w** = (–1,1,0).
5. Scrivere delle equazioni parametriche della retta passante per l'origine delle coordinate e perpendicolare sia alla retta s di equazioni (nel parametro τ) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \tau \\ z = 3-2\tau \end{cases}$, sia alla retta b di equazioni (nel parametro λ) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.
6. Calcolare l'area del parallelogramma determinato dai vettori **u** = (1,1,2), **v** = (2,0,–3) e trovare i parametri direttori delle rette che sono ortogonali alla giacitura determinata da **u, v.**
7. Verificare che i punti A =(1,0,2), B =(2,0,1), C = (–1,3,1) non sono allineati, e calcolare l'area del triangolo ABC.

3. Rette nel piano.

1. Nel piano, riferito ad un sistema cartesiano di origine O con coordinate x,y, sono assegnati il vettore **a** = (2,–1) ed il punto $Q = (3,0)$. Scrivere delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana per

   a. la retta che passa per O e per Q
   b. la retta parallela a **a** che passa per Q
   c. la retta perpendicolare ad **a** e passante per Q.
2. Sono dati i punti $P = (1,5)$, $Q = (3,0)$. Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane della retta PQ.
3. Trovare delle equazioni parametriche per la retta a di equazione $x + 5y – 8 = 0$ e rappresentare sia in forma parametrica sia in forma cartesiana
   a. la retta che è perpendicolare ad a e passa per il punto $Q = (3,0)$
   b. la retta che è parallela ad a e passa per il punto $Q = (3,0)$.
4. Nel piano sono assegnati i punti $L = (2, 3)$, $M = (-1,1/2)$, $N = (-2,2)$.
   a. Controllare che essi non sono allineati,
   b. scrivere un'equazione cartesiana della retta r che passa per L e M,
   c. scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane della retta n che è ortogonale a r e passa per N
   d. trovare la distanza di N dalla retta r
   e. calcolare l'area del triangolo LMN.
5. Nel piano sono date le rette r, d'equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = -1+2t \end{cases}$, e r', d'equazione cartesiana $x + 6y + 2 = 0$.

   Stabilire se le due rette sono incidenti; in caso affermativo, trovare il punto in cui s'intersecano; in caso negativo, trovare la distanza tra esse, sia come distanza tra due punti opportunamente scelti su di esse, sia utilizzando un prodotto scalare.
6. Nel piano sono date le rette r, d'equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = -1+2t \end{cases}$, e s, d'equazione cartesiana $3x + 6y + 2 = 0$.

   Stabilire se le due rette sono incidenti; in caso affermativo, trovare il punto in cui s'intersecano; in caso negativo, trovare la distanza tra esse.
7. Detto A il punto di coordinate $(2,-4)$, trovare le coordinate di:
   a. il punto simmetrico di A rispetto alla retta d'equazione $y = 1$
   b. il punto simmetrico di A rispetto al punto $U = (1,1)$
   c. il punto simmetrico di A rispetto alla retta $y = x$
   d. il punto simmetrico di A rispetto alla retta $x + y = 1$.
8. Verificare che l'insieme dei punti che sono equidistanti dai due punti $A = (2,-4)$, $B = (-1,3)$ è una retta (asse del segmento AB) che è perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio.
9. Trovare i versori delle rette r, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = -1+2t \end{cases}$, e r', di equazione cartesiana $x + 6y + 2 = 0$,

   entrambe orientate nel verso delle y crescenti; calcolare il coseno dell'angolo tra r,r'[1].
10. Scegliere l'orientamento delle rette di equazioni, rispettivamente, $x + y + 3 = 0$, $3x - y = 0$ in modo che risulti acuto l'angolo tra le due rette così orientate; calcolare il coseno di questo angolo.
11. Calcolare i coseni degli angoli tra le rette $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$, $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$.
12. Verificare che il punto R di coordinate $(-2,0)$ non appartiene alla retta s di equazione $-3x + 4y -1 = 0$; calcolare la distanza di R da s in due modi diversi, cioè: sia trovando la distanza di R dal punto che è la sua proiezione ortogonale su s, sia usando la forma normale dell'equazione di s.
13. Calcolare la distanza tra le rette s, di equazione $-3x + 4y -1 = 0$, ed s', di equazione $12x -16y = 0$.
14. Ricordando una caratterizzazione geometrica delle bisettrici degli angoli di due rette, trovare delle equazioni che rappresentino le bisettrici delle rette di equazioni $x + 5y + 3 = 0$, $3x - 4y = 0$.
15. Determinare l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dalla retta di equazione $x + y = 1$ è uguale a $3\sqrt{2}$.
16. Su un foglio quadrettato, disegnare un sistema di assi cartesiani e rappresentarvi:
   a. il semipiano definito dalla disequazione $x + 5y + 3 > 0$
   b. le rette di equazioni, rispettivamente, $x + y + 3 = 0$, $3x - 4y = 0$. Rappresentare con disequazioni la regione angolare che ha i lati su queste rette e contiene il punto di coordinate $(0,1)$.
17. Quale regione piana è determinata dalla disequazione $(x + 2y + 2)(x - 3) < 0$? Quale da $x^2 - 4 \leq 0$?
18. Un corriere A trasporta pacchi alla tariffa di 10 euro al chilogrammo, mentre il corriere B pratica un costo fisso di 12 euro per spese generali e chiede 8 euro al chilogrammo. Stabilire per quali spedizioni (cioè, per spedire pacchi di quali pesi) sia più conveniente il corriere B.
19. Rappresentare il fascio delle rette che passano per $(2,6)$; trovare la retta del fascio che è perpendicolare alla retta di equazione $x = 5y$.
20. Utilizzare un fascio di rette per determinare la parallela all'asse delle x che contiene il punto comune alle rette di equazione, rispettivamente, $-3x + y - 1 = 0$, $7x - 2y = 33$.
21. Dalle equazioni del fascio di rette di centro $(3,4)$ ricavare un'equazione per la retta che congiunge $(3,4)$ e $(1,2)$.

[1] Poiché non sono richieste le espressioni decimali dei numeri trovati, è corretta la risposta: $\frac{13}{\sqrt{5}\sqrt{37}}$.