Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], cap. 2, n. 5, E.5, 6, E.6.

1. Equazioni cartesiane di piani.

1. Scrivere delle equazioni cartesiane che rappresentino i piani determinati da ciascun insieme di condizioni:
   a) passare per il punto (4,1,2) ed essere perpendicolare alla retta r di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$
   b) passare per il punto (2,3,5) ed essere perpendicolare all'asse delle y
   c) passare per il punto $A = (2,0,2)$, ed essere parallelo ai vettori $\mathbf{u} = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (2,0,-3)$
   d) contenere i punti $A = (2,0,2)$, $B = (-1,3,2)$, $C = (0,2,1)$
   e) essere parallelo all'asse delle y e alla retta di equazioni (nel parametro t) $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$ e passare per il punto (4,1,2)
   f) contenere la retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$ ed il punto (2,1,2)
   g) contenere l'asse delle x ed il punto (2,3,5)
   h) passare per l'origine delle coordinate ed essere parallelo al piano di equazione $x + 2y + z = \pi$
   i) passare per il punto (2,3,5) ed essere parallelo al piano dei due assi coordinati delle y e delle z
   j) passare per i punti (2,3,5), (3,0,0) ed essere parallelo alla retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t$, $y = t$, $z = 3 - t$
   k) passare per l'origine delle coordinate ed essere perpendicolare ai due piani di equazione, rispettivamente, $x + 2y = 0$ e $x + y - 3z = 3$.
2. Scrivere delle equazioni parametriche per la retta che passa per il punto $P = (2,3,5)$ ed è perpendicolare al piano $\prod$ di equazione $x + y + 3z + 154 = 0$. Utilizzando le equazioni trovate, determinare la distanza del punto P da $\prod$. Verificare il risultato ottenuto usando dei prodotti scalari.
3. Scrivere un'equazione cartesiana del piano ψ che passa per il punto (2,–3,4) ed è parallelo al piano φ di equazione $x + 2y - z + 4 = 0$. Trovare la distanza tra i piani ψ e φ.

2. Fasci di piani, equazioni cartesiane di rette.

1. Dopo aver verificato che i piani $x - 5y + z = 1$, $3x - 5y + 2z = 4$ non sono paralleli, scrivere un'equazione del fascio dei piani che contengono la loro intersezione e determinare il piano del fascio che passa per il punto (2,–3,4). Trovare un vettore di direzione e delle equazioni parametriche per la retta *asse* del fascio.
2. Sia F il fascio dei piani che contengono la retta di equazioni parametriche (nel parametro s) $\begin{cases} x = s, \\ y = 3s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$.

   Rappresentare F con una equazione cartesiana e determinare, *se possibile*:
   a) il piano di F che passa per l'origine delle coordinate
   b) il piano di F che è parallelo alla retta di equazioni parametriche $x = t$, $y = 1$, $z = 2t$ (nel parametro t)
   c) il piano di F che è parallelo alla retta di equazioni cartesiane $x = y - 2 = 3z + 2$
   d) il piano di F che è perpendicolare all'asse delle z
   e) il piano di F che è parallelo all'asse delle z
   f) il piano di F che contiene l'asse delle x
   g) il piano di F che contiene la retta di equazioni cartesiane $x = y = z - 1$.
3. Scrivere un'equazione del piano che contiene il punto (1,1,1) e la retta di equazioni $\begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$.
4. Scrivere un'equazione del fascio dei piani perpendicolari alla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$.
5. Nel fascio dei piani perpendicolari alla retta di equazioni cartesiane $x = 3y = z + 3$ determinare quello che passa per il punto (1,1,1).
6. Mostrare che tutti i piani che sono perpendicolari al piano Φ di equazione $3x + 2y = 0$ nel punto (2,–3,1) formano un fascio; in quale relazione sono Φ e la retta sostegno del fascio?
7. Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto (1,1,1) e l'asse delle y.
8. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta che è perpendicolare a $x + 4y = 1$ e passa per il punto (1,3,4).

3. Problemi su rette e piani.

1. Verificare che le rette *a, b*, di equazioni cartesiane rispettivamente $\begin{cases} x-4y=2 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} x-4y=0 \\ z=2 \end{cases}$, sono parallele, e che la retta intersezione del piano per *a* ed $U=(0,0,1)$ con il piano per *b* ed U è parallela a entrambe.
2. Verificare che le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente, $\begin{cases} 4x-3z=5 \\ x+y=-3 \end{cases}, \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x=1 \end{cases}$ non sono parallele e scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo ad entrambe e passante per il punto (1,1,0).
3. Verificare che le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente, $\begin{cases} 4x-3z=5 \\ x+y=-3 \end{cases}$, $x = y = z - 1$ sono sghembe. Scrivere un'equazione del piano che contiene la prima retta ed è parallelo alla seconda; calcolare la distanza tra le due rette.
4. Verificare che il punto $L = (2,-3,4)$ non appartiene alla retta *l* di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=0 \end{cases}$ e trovare la distanza di *L* da *l.*
5. Verificare che la retta *r* di equazioni parametriche $\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-3t \end{cases}$ e la retta *s* di equazioni cartesiane $x+y=z=0$ sono sghembe e calcolare la loro distanza. Esiste una retta perpendicolare ad entrambe che le incontra? Verificare che questa è determinata dai punti di *r* ed *s* che sono alla minima distanza.
6. Dimostrare che il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti da due punti $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$, fissati, è il piano che è perpendicolare alla retta di P_2P_1 e passa per il loro punto medio (*piano assiale*).
7. Determinare e studiare l'insieme dei punti dello spazio che sono equidistanti da $P_1 = (0,1,2)$, $P_2 = (1,-1,0)$, $P_3= (0,0,2)$.
8. Stabilire se le rette *r,* di equazioni $\begin{cases} x-3y-z=2 \\ -x+2y-4z=1 \end{cases}$, ed *s,* di equazioni parametriche $\begin{cases} x=3+t \\ y=2-2t \\ z=5+t \end{cases}$, nel parametro *t*, sono sghembe o complanari; nella prima eventualità, trovare la loro distanza, nella seconda, determinare il piano che le contiene.
9. Verificare che le rette *r,* di equazioni $\begin{cases} x-y-z=2 \\ -x+2y-4z=1 \end{cases}$, *r'* di equazioni parametriche $\begin{cases} x=6t \\ y=5t \\ z=t+1 \end{cases}$ sono parallele, e trovare la distanza tra di esse.
10. Stabilire, motivando la risposta, quali tra le seguenti coppie di rette sono costituite da rette complanari e trovare delle equazioni dei piani che le contengono:

    a) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-9t \end{cases}, \begin{cases} x=2s \\ y=-\frac{2}{3}s \\ z=6s \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-9t \end{cases}, \begin{cases} x=2+h \\ y=-h \\ z=2h \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-9t \end{cases}, \begin{cases} x=2+k \\ y=1+k \\ z=1+k \end{cases}$.
11. Trovare delle equazioni che rappresentino la retta proiezione ortogonale della retta $x = y = z$ sul piano $x = 0$.
12. Rappresentare con equazioni cartesiane la retta proiezione ortogonale dell'asse delle y sul piano $x + y + z = 1$.
13. Verificare che la retta, passante per (2,1,3) e parallela alla retta *a* di equazioni $\begin{cases} x=4 \\ y=z \end{cases}$, giace nel piano α di equazione $2x + y - z = 2$. Rappresentare con equazioni cartesiane il fascio improprio delle rette che giacciono in α e sono parallele ad *a.* Esiste nel piano α qualche retta parallela alla retta $x = y = z$?
14. Esiste qualche retta che sia parallela a entrambi i piani $2x + y - z = 2$, $y = z$? Se esiste, scriverne delle equazioni.
15. Rappresentare con equazioni cartesiane il fascio proprio delle rette che passano per (2,1,3) e sono contenute nel piano α di equazione $2x + y - z = 2$.
16. Dati due piani distinti, esiste qualche retta perpendicolare a entrambi?
17. Verificare che le rette di equazioni, rispettivamente, $x = y = z$, $x + 1 = z = 0$ sono sghembe e non passano per (2,0,0). Determinare la retta per (2,0,0) che incontra ciascuna di esse. (*Suggerimento:* quella retta è complanare con ciascuna delle due rette sghembe).