

Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 3, n. 2, 3, E.3

1. Equazioni e sistemi equivalenti.

1. Per ciascuna coppia di equazioni, stabilire se è formata da due equazioni equivalenti:

a) $x + 5 = 0$; $-15 = 3x$; b) $3x = 0$; $x = 1/3$; c) $x(x - 1) = 0$; $x - 1 = 0$.

2. I due sistemi lineari $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$ hanno entrambi la soluzione (0,0). Si può concludere che i due

sistemi sono equivalenti? Motivare la risposta.

2. Riduzione di una matrice nella forma a scala.

1. Ridurre a scalini le seguenti matrici, e determinarne il rango:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 18 \\ -2 & 1 & -9 \\ 1 & -1/2 & 9/2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. In ognuna delle matrici che seguono, uno o più elementi dipendono dalla scelta di un numero reale α . Stabilire, per ciascuna matrice, se il suo rango possa variare a seconda della scelta di α e, in caso affermativo, spiegare in qual modo il rango dipenda da α .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & \alpha \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & \alpha + 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha^2 + 1 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha + 4 \end{pmatrix}.$$

3. Sistemi lineari.

1. Utilizzare la proposizione 3.6 del cap. 3 in [testo], o il teorema di Rouché-Capelli, per stabilire quali dei seguenti sistemi lineari è compatibile:

$$(a) \begin{cases} -x + y + z + w = -2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ -4y - z - 2w = 0 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \\ -x + 8y - 4z = 1 \end{cases}; \quad (c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 1 \end{cases}; \quad (d) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \end{cases}; \quad (e) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 7y - z = 0 \\ -x + 5y - 3z = -4 \end{cases}.$$

2. Trovare, con il metodo di Gauss, tutte le soluzioni dei sistemi compatibili dell'esercizio 1.

3. Scrivere e risolvere, con il metodo di Gauss, tutti i sistemi lineari omogenei associati ai sistemi dell'esercizio 1.

4. Risolvere il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} 3x - z + w = 0 \\ x + y + 4z + 7w = 0 \\ x - 2y - 9z + w = 0. \end{cases}$

5. Determinare per quali valori del coefficiente λ è compatibile il sistema lineare $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, in ognuno dei seguenti casi

$$(i) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (ii) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

e trovare quante e quali siano le soluzioni in ciascun caso di compatibilità.

6. Determinare i valori del parametro λ per cui sono compatibili i sistemi

$$(a) \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x + y = \lambda \\ x + y = 2 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x - y - 6z = -3 \\ x + 2y + 4z = 1 \\ x - y + 2\lambda z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y - 2z = 1. \end{cases}$$

e trovare tutte le soluzioni di ciascun sistema.

7. Determinare i valori del parametro μ per cui il sistema omogeneo $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ x - 2y - z\mu = 0 \end{cases}$ ammette autosoluzioni;

per quei valori di μ , trovare tutte le autosoluzioni.

8. Determinare i valori dei parametri λ, μ per cui il sistema $\begin{cases} x + 2y = \mu \\ x + 4y = 1 \\ x + (\lambda + 2)y = 1 \end{cases}$ è compatibile e trovare tutte le

soluzioni.

9. Dal compito d'esame del 1 aprile 2005

Discutere e, per i valori del parametro t per cui è possibile, trovare tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ x - y = 4t \\ tx + ty - z = 0 \end{cases}$$

10. Dal compito d'esame del 10 luglio 2006.

a. Discutere e, per i valori del parametro reale k per cui è possibile, risolvere il sistema lineare nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 4z = 1 - k \end{cases}$$

b. Interpretare geometricamente i risultati ottenuti, rispondendo alle seguenti domande senza fare altri calcoli: dette r la retta di equazioni $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$ ed r_k la retta di equazioni $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 4z = 1 - k \end{cases}$, esistono valori di k per i quali r

e r_k sono sghembe? Vi sono valori di k per i quali r_k è parallela a r ? Esistono valori di k per cui r e r_k sono incidenti? (punti 3+3)

11. Dal compito d'esame dell'11 settembre 2006.

a. Discutere e, per i valori dei parametri reale h, k per cui è possibile, risolvere il sistema lineare nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ x + z = h \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

b. Sia:

- α il piano di equazione $x - 2y - z = 1$
- β il piano di equazione $x + z = h$
- γ il piano di equazione $x + y + kz = 0$.

Senza fare ulteriori calcoli, utilizzare la discussione ed i risultati precedenti per rispondere alle domande:

- i) esistono valori di h e k per i quali i tre piani si intersecano in un solo punto?
- ii) Vi sono valori di h e k per i quali i tre piani appartengono ad uno stesso fascio (proprio)?
- iii) Esistono valori di h e k per i quali il piano α è parallelo alla retta che è l'intersezione dei piani β, γ ?

(punti 5+3)