Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 3, n. 3, E.3, 4, 5, 6.

1. *Dalla prova d'esame del 21 marzo 2006.* Stabilire se i vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti; in caso negativo, scegliere un loro sottoinsieme *S* formato da vettori linearmente indipendenti (in numero massimo possibile) ed esprimere i restanti vettori come combinazione lineare di quelli del sottoinsieme *S*.

2. *Dalla prova d'esame del 3 aprile 2007.* Stabilire se per qualche valore di α i vettori

$$\mathbf{a} = (1,1,9),\ \mathbf{b}(\alpha) = (0,\alpha,1),\ \mathbf{c} = (1,0,2)$$

sono linearmente dipendenti; per quel valore di α, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

3. *Dal compito d'esame dell'11 settembre 2006.* a. Discutere e, per i valori del parametro λ per cui esistono delle autosoluzioni, risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ .$$

b. Utilizzare i risultati ottenuti sopra per stabilire quali, tra i vettori

$$\mathbf{u_1} = (5,1,2),\ \ \mathbf{u_2} = (3,1,0),\ \ \mathbf{u_3} = (2,0,2),\ \ \mathbf{u_4} = (1,2,\lambda)$$

siano linearmente indipendenti, al variare di λ, e se sia possibile scrivere il vettore $\mathbf{u_4}$ come combinazione lineare di vettori, tra loro indipendenti, scelti fra $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$.

4. E' vero o falso che quattro vettori in $\mathbb{R}^3$, comunque si scelgano, sono linearmente dipendenti? Motivare la risposta.

5. Dal calcolo del rango delle matrici che seguono, riconoscere quali tra esse sono invertibili e, in caso affermativo, calcolarne le inverse:

$$-\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Calcolare i determinanti delle matrici (si consiglia di utilizzare le proprietà del determinante per ridurre i calcoli)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 67 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 23 \\ 0 & 4 & 6 & 43 \\ 0 & 0 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 9 & 0 \\ 44 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 22 & -2 & 2 \\ 44 & 55 & -11 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. Usare le proprietà dei determinanti per verificare che, se i vettori (a,b,c), (a',b',c') sono linearmente indipendenti, posto

$$\mathbf{v} = \left(\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \right),$$

allora per ogni numero reale k, il vettore $k\mathbf{v}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}.$$

Suggerimento: sostituendo le componenti di **v** nel primo membro di ciascuna equazione si ottiene lo sviluppo di un determinante; perché quel determinante vale 0?

8. Usare le proprietà dei determinanti per dimostrare che è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & .... & 10 \\ 11 & 12 & 13 & .... & 20 \\ 21 & 22 & 23 & .... & 30 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 91 & 92 & 93 & ... & 100 \end{pmatrix} = 0.$$

9. Dimostrare che una matrice è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da 0.

10. Usare dei determinanti per:

a) stabilire se esista qualche scelta dell'elemento h per cui la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & h \end{pmatrix}$ sia invertibile,
b) trovare per qual valore di k i tre vettori ($2,12,k$), ($4,0,1$), ($3,2,0$) sono linearmente dipendenti.

11. E' vero o falso che det(**A** + **B**) = det(**A**) + det(**B**) ? Motivare la risposta!

12. Nello spazio, sono assegnati i punti R = (1,0,2), S = (2,2,0), T = (0,0,3), U = (1,1,1). Usare dei determinanti per:

a) verificare che i punti R,S,T,U non sono complanari
b) calcolare il volume del parallelepipedo individuato dagli spigoli RS, RT, RU;
c) scrivere un'equazione del piano δ passante per U e parallelo alle rette RS, RT;
c) scrivere l'equazione del piano STU.

13. Usare dei determinanti per

a) scrivere un'equazione del piano che passa per (1,0,3) ed è parallelo alle rette di equazioni parametriche, rispettivamente nei parametri reali *t* ,*s*, $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1, \\ y = s \\ z = 2 - s \end{cases}$;

b) scrivere un'equazione del piano passante per (1,0,3) e perpendicolare alla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x - 3y - z = 2 \\ -x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$.

14. Stabilire se le rette di ciascuna delle coppie seguenti sono sghembe; nel caso che le rette non siano sghembe, stabilire, con il calcolo del rango di opportune matrici, se siano parallele o incidenti:

$$\text{(i)} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 4y + z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ z = 2 \end{cases}; \quad \text{(ii)} \begin{cases} x + 4z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}.$$

15. a) Usare le proprietà dei determinanti per dimostrare che la condizione di allineamento di tre punti *A*,*B*,*C* nel piano è

$$\det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Suggerimento: il determinante non cambia se ad una riga si sottrae un'altra.

b) Quale determinante del quarto ordine si può utilizzare per esprimere la condizione di complanarità di quattro punti dello spazio?

16. Si giustifichi l'affermazione: dati nel piano due punti distinti $A = (a,b)$, $B = (c,d)$, non allineati con l'origine *O*, l'area del parallelogrammo che ha *AOB* come vertici consecutivi è il modulo di

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Suggerimento: pensare *O*,*A*,*B* come punti dello spazio, con la terza coordinata uguale a zero, e calcolare il prodotto $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

17. Usare dei determinanti per

i) scrivere un'equazione della retta che, nel piano riferito a coordinate cartesiane *x*,*y*, congiunge i punti $P = (2,9)$ e $Q = (12, 5)$

ii) verificare se i punti di coordinate (2,7), (−4, 3), (−2,5) sono allineati

iii) calcolare l'area del triangolo che ha per vertici i punti di coordinate (2,7), (−4,3), (1,0).

18. Usare un determinante per scrivere la condizione di parallelismo tra due rette individuate, nel piano, dalle equazioni $a\,x + b\,y + c = 0$, $a'\,x + b'\,y + c' = 0$.