

Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 4, n. 1, E.1, 2, E.2, 3

Circonferenze nel piano.

1. Stabilire se le equazioni che seguono rappresentano delle circonferenze e, in caso affermativo, trovare i relativi centri e raggi
a) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 + x + 1 = 0$; c) $4x^2 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$.
2. Stabilire quale tra i punti $P = (4, -3)$, $Q = (-3, -1)$, $R = (-3/2, -3/2)$ è interno e quale appartiene alla circonferenza $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$.
3. Se esiste una circonferenza che passi per i punti $L = (-1, -1)$, $M = (0, -8)$ e per l'origine $O = (0, 0)$, trovarne il centro, il raggio, un'equazione, e la tangente nell'origine.
4. Trovare un'equazione della circonferenza che passa per $A = (2, 4)$ ed è tangente nel punto $B = (-2, -1)$ alla retta di equazione $x - 2y = 0$.
5. a) Tutte le circonferenze che passano sia per $B = (-2, -1)$ che per $C = (0, 1)$ hanno i centri su una stessa retta: quale?
b) Quante e quali sono le circonferenze che passano per B e per C e sono tangenti in C alla retta $x + y = 1$?
c) Quante e quali sono le circonferenze che passano sia per B che per C e sono tangenti alla retta di equazione $x = 1$?
6. a) Scrivere un'equazione per rappresentare la famiglia (fascio) F di tutte le circonferenze che sono tangenti nel punto $A = (2, 4)$ alla retta $x - y + 2 = 0$.
b) Scrivere le equazioni delle circonferenze, della famiglia F , che hanno raggio uguale ad 1.
c) Esiste in F una circonferenza che passi per $C = (0, 1)$? In caso positivo, determinarne il centro e il raggio.
7. Determinare centro, raggio ed un'equazione della circonferenza che passa per $A = (2, 4)$, per $C = (0, 1)$ ed ha il centro sull'asse delle x .
8. Fra tutte le circonferenze che hanno il centro nel punto $A = (2, 4)$, trovare quella che è tangente alla retta di equazione $3x = y$, stabilendo quale sia il punto di contatto; scrivere un'equazione della circonferenza trovata.

Ellisse, iperbole, parabola; equazioni parametriche, equazioni polari.

1. Per ciascuna delle equazioni che seguono, tracciare uno schizzo approssimativo del luogo di punti del piano definito da essa, segnando gli eventuali fuochi, assi, asintoti, centri
a) $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$; b) $4y^2 - x = 0$; c) $4y^2 - x^2 = 0$; d) $4x^2 + 4y^2 = 1$; e) $x^2 - y^2 + 1 = 0$;
f) $4x^2 + 25(y - 1)^2 = 100$; g) $y^2 + 4x^2 = 0$; h) $y^2 - 4x^2 = 0$; i) $x^2 - y^2 = 0$.

2. Scrivere un'equazione cartesiana dell'ellisse che ha un fuoco nell'origine delle coordinate, l'altro in $(2,2)$ e il cui asse trasverso ha lunghezza $2a = 8$. Rappresentare la stessa ellisse in forma canonica (cioè, in un riferimento in cui gli assi coordinati coincidono con gli assi di simmetria dell'ellisse).
3. Scrivere un'equazione della parabola che ha come direttrice la retta $x = y$ ed il fuoco nel punto $(0, -1)$. Qual è il vertice di questa parabola?
4. Sia $\alpha > \beta > 0$. Studiare, al variare di k , le curve della famiglia $\frac{x^2}{k + \alpha} + \frac{y^2}{k + \beta} = 1$.
5. Trovare delle equazioni parametriche della circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ e utilizzarle per scrivere un'equazione della tangente in $(2,1)$.
6. Scrivere delle equazioni parametriche per la curva d'equazione $4x + y^2 = 0$ e usarle per trovare la tangente in $(-9, 6)$.
7. Scrivere delle equazioni parametriche per la curva di equazione $(x-2)^2 + 9(y+2)^2 - 36 = 0$ ed utilizzarle per determinare la tangente alla conica nel punto $(5, -2 + \sqrt{3})$.
8. Rappresentare in forma parametrica la curva d'equazione $x^2 + 2x - 4y^2 + 24y = 51$.
9. Stabilire il tipo (ellisse, parabola, iperbole) delle curve della famiglia rappresentata dalla equazione, dipendente dal parametro k , $(x-k)^2 - 9(y-2k^2)^2 - 36 = 0$; determinare e studiare la curva luogo dei centri delle curve della famiglia.
10. Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, dimostrare che il luogo dei punti medi delle intersezioni di una parabola con le rette per il suo vertice è ancora una parabola.
11. (Dalla prova scritta del 10 luglio 2006). Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche dell'ellisse E che ha come fuochi i punti $O = (0,0)$ e $Q = (8,0)$ e ha un vertice nel punto $R = (-4,0)$. Trovare gli altri tre vertici di E . (3 punti)
12. Determinare un'equazione cartesiana per la curva C di equazioni parametriche $y = 2 + t$, $x = 1 + t^2$ e fare un breve studio di C .
13. Trovare un'equazione polare per l'ellisse che ha eccentricità uguale a $1/4$, e per la quale un fuoco dista di 2 dalla relativa direttrice.
14. Quale curva è rappresentata dall'equazione polare $\rho = \cos \vartheta$?
15. Descrivere la curva di equazione polare $\rho = \frac{1}{1 + 2 \cos \vartheta}$.