Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti negli appunti delle lezioni n. 19, 20, oppure in P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare,* Zanichelli, Appendice B, **e in [testo], capitolo 4, n. 4, E.4.**

Sulle coniche.

1. Usare semplici sostituzioni di variabili (sfruttando decomposizioni in fattori o completamenti di quadrati) per determinare il centro, gli assi, gli eventuali asintoti, oppure, in caso di curve scomponibili in coppie di rette, le componenti, delle curve di equazioni
   a) $x^2+4y^2+8y+3 = 0$; b) $x^2+4xy+3y^2 = 0$; c) $(x-2y)(x+2y) = 1$; d) $x^2+4xy+3y^2 = 1$;
   e) $4x^2+12xy+9y^2-3x+2y= 0$; f) $x^2+9y^2+4x-12y+15= 0$; g) $x^2+4y^2-4xy=1$.

2. **(<u>Studio dell'iperbole</u>)** Verificare che le rette parallele ad un asintoto dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ incontrano l'iperbole in un solo punto, fuorché l'asintoto stesso, che non ha intersezioni con l'iperbole.
   i) Verificare, usando il "teorema di classificazione", che l'equazione $3x^2+4xy+y^2+8x=0$ rappresenta un'iperbole. Utilizzare l'osservazione precedente per determinarne gli asintoti e quindi il centro. (*Suggerimento: imporre che un certo sistema di secondo non abbia soluzioni*)
   ii) Verificare che la conica di equazione $2x^2-3xy-2y^2+2x=0$ è un'iperbole equilatera (cioè, ha asintoti perpendicolari tra loro); trovarne il centro.
   iii) Si ricordi che le bisettrici delle due rette di equazioni $ax + by + c =0$, $a'x + b'y + x' = 0$ sono (perché?) le rette di equazioni $\frac{ax+by+x}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$. Utilizzare questa osservazione per trovare gli assi delle iperboli studiate sopra.

3. **(<u>Studio della parabola</u>)** Verificare, usando il "teorema di classificazione", che l'equazione
   $$x^2+4xy+4y^2+6x = 0$$
   rappresenta una parabola *p.* Ricordando che le rette parallele all'asse incontrano la parabola in un solo punto e che la tangente nel vertice ha la direzione perpendicolare a quella dell'asse, determinare l'asse e il vertice di *p*. *(Suggerimento: imporre che un certo sistema di secondo grado abbia una sola soluzione*)

4. Stabilire per quali valori del parametro A l'equazione $x^2+2Axy+Ay^2-4x+3y+1=0$ rappresenti delle iperboli, delle parabole, delle ellissi. Verificare che una tra le parabole trovate ha l'asse parallelo all'asse delle *y,* e determinarne vertice, fuoco ed equazione canonica (con asse della parabola coincidente con l'asse delle *x*).

5. (*Dalla prova d'esame del* 3 aprile 2007) Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali *x,y,* è assegnata la famiglia di coniche di equazione (dipendente da un parametro *k*)
   $$k\,x^2 + y^2 + 12(k-1)\,x - 2\,k\,y - 6\,k = 0.$$
a) Stabilire per quali valori di *k* le coniche corrispondenti siano ellissi, parabole, iperboli. (1 punto)
b) Se la famiglia contiene una circonferenza, determinare il centro, il raggio di questa circonferenza e le sue equazioni parametriche. (punti 1+ ½)
c) Studiare brevemente la conica che si ottiene per $k = 0$, determinandone fuochi, vertici, e l'eccentricità. (p. 1+ ½)

6. Trovare un'equazione cartesiana per la curva di equazioni parametriche $x=t, y=\frac{t}{t+1}$; studiare la curva.

7. Per ogni punto *A* sull'asse delle *x,* sia *A'* il punto che è simmetrico di *A* rispetto a $U = (1,0)$. Siano: *r l*a retta congiungente *A* con (0,1), *r'* la retta per *A'* e per (0,–1), *P* il punto comune a *r* e *r'.* Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del luogo L descritto da *P* al variare di *A* sull'asse delle *x.* Studiare L.

8. E' vero o falso che, in un sistema di riferimento opportuno, un'iperbole equilatera ha equazione $xy = k$, per *k* diverso da 0? Motivare la risposta.

9. Dalla prova scritta del 24 marzo 2004. Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche *x,y,* è assegnata la famiglia *F* di coniche, rappresentate dall'equazione seguente, dipendente dal parametro *h:*
   $$-x^2+2(h-1)xy-y^2+2x-1+4h=0.$$

a) Stabilire se la famiglia F contiene delle circonferenze e, in caso affermativo, trovarne centro e raggio.
b) Stabilire se la famiglia F contiene delle parabole e, in caso affermativo, per ciascuna indicare la direzione dell'asse (non è richiesto di trovare l'asse).

Superfici sferiche, coni, cilindri, circonferenze nello spazio.

1. Stabilire se le equazioni che seguono rappresentano delle superfici sferiche (o, per semplicità, sfere) e, in caso affermativo, trovare i relativi centri e raggi
$a)\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0;\ b)\ x^2+y^2+z^2+2x-y+z+8=0;\ c)\ x^2+y^2+z^2+2x+2y+2=0.$

2. Stabilire se esiste una sfera che passi per i punti $P = (4,-3,0)$, $Q = (-2,-3,0)$, $R = (-2,0,0)$, $S = (0,0,4)$; in caso affermativo, trovarne il centro, il raggio ed un'equazione.

3. Trovare il piano che è tangente alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-y+8z=0$ nell'origine delle coordinate.

4. Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che è tangente al piano $x+y+z=3$ nel punto (2,1,0) e passa per il punto (4,5,2).

5. Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che ha il centro nel punto $(2,1,-3)$ ed è tangente al piano $2x+y-z=0$.

6. Scrivere un'equazione della sfera che ha i punti $(1,1,-1)$ e $(1,-2,1)$ come estremi di un diametro. Trovare il centro ed il raggio della circonferenza che è la sezione di questa sfera con il piano di equazione $x = z$ e rappresentare questa circonferenza con equazioni cartesiane.

7. Scrivere un'equazione della sfera con il centro sul piano $x = 0$ che taglia sul piano $2x + y + z - 7 = 0$ la circonferenza di centro (2,2,1) e raggio $\sqrt{3}$.

8. Quante sono le sfere di raggio uguale a 5 che tagliano sul piano $z = 3$ la circonferenza di centro (1,1,3) e raggio uguale a 3? Trovarne delle equazioni cartesiane.

9. Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per il cilindro con le generatrici parallele all'asse delle x che taglia sul piano $x = 0$ l'ellisse di equazioni
$$\begin{cases} x=0 \\ y^2+4z^2-64=0. \end{cases}$$

10. Rappresentare in forma parametrica le rette che congiungono l'origine delle coordinate con i punti della parabola Ƥ di equazioni $\begin{cases} z=1 \\ y=x^2 \end{cases}$; ricavare dalle equazioni parametriche un'equazione cartesiana del cono con vertice nell'origine che contiene la parabola Ƥ. Determinare il tipo delle intersezioni del cono con i piani x = costante.

11. Scrivere delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana del cono con vertice nell'origine che taglia sul piano $y = 2$ la circonferenza di centro (0,2,0) e raggio 3.

12. Scrivere delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana del cono di vertice (0,0,1) che taglia sul piano $z = 0$ la circonferenza $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$. Verificare che la matrice dei coefficienti dell'equazione del cono è singolare.

13. Descrivere la superficie di equazione $x^2 + z^2 = 16$ e scriverne delle equazioni parametriche. Studiare le curve che sono le sue sezioni con i piani paralleli ai piani coordinati.

14. Rappresentare con equazioni cartesiane la circonferenza che giace nel piano $x + y = 1$, ha centro (1,0,0) e ha raggio uguale a 1.