Gli esercizi che seguono riguardano gli argomenti contenuti in [testo], capitolo 4, n. 4, E.4, 5, E.5, 6.

1. Studiare le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati di ciascuna delle quadriche di equazioni

   a) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; b) $x^2 - 4y^2 - z^2 = 1$; c) $xy = z$; d) $x^2 + 4z^2 = 2y$.

   Dedurne se si tratta di ellissoide, iperboloide a una o due falde, paraboloide ellittico o a sella.

2. Una delle quadriche seguenti è tagliata da piani paralleli ad uno dei piani coordinati lungo delle circonferenze: quale?

   (i) $4x^2 - y^2 = 2z$, (ii) $4x^2 + 4y^2 - z = 0$.

   Spiegare come la quadrica che contiene circonferenze possa essere generata dalla rotazione di una conica (è detta perciò *quadrica rotonda*) e ricavare delle equazioni parametriche di questa superficie.

   Studiare le intersezioni dell'altra quadrica con i piani del fascio improprio $2x + y = h$ e stabilire, in base ai risultati ottenuti, se si tratta di paraboloide ellittico o a sella.

3. Per ciascuna delle quadriche seguenti, esaminare le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati e dedurne se si tratti di ellissoidi o iperboloidi ad una falda o a due falde, e se fra di esse vi siano quadriche rotonde:

   (a) $3x^2-4y^2-4z^2 = 1$, (b) $(x-1)^2+4y^2+(z+3)^2 = 1$, (c) $4x^2+4y^2+4z^2+x+10z = 0$,
   (d) $-4x^2+y^2-z^2 = 1$.

4. Verificare che le rette delle due famiglie rappresentate, al variare dei parametri reali *t*, *s*, dalle equazioni

   $$\begin{cases} x = zt \\ y = \dfrac{1}{4t} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = s \\ y = \dfrac{z}{4s} \end{cases}$$

   giacciono tutte su una stessa quadrica (che è un paraboloide a sella).

   Mostrare che due rette della stessa famiglia sono sghembe e che due rette di famiglie diverse si incontrano in un punto della quadrica. In particolare, dopo aver verificato che il punto (1,1,4) appartiene alla quadrica, determinare le rette di ciascuna famiglia che passano per esso, e scrivere un'equazione del piano delle due rette.

5. Descrivere brevemente la superficie di equazione $4y^2 + 4z^2 = 1$ e verificare che, dato il numero reale non nullo k, la curva (*elica circolare di passo* k) di equazioni parametriche, nel parametro reale t

   $$x = kt, \; y = \frac{1}{2}\cos t, \; z = \frac{1}{2}\sin t$$

   giace sulla superficie. Determinare la retta tangente alla curva nel punto $(k\pi, -1/2, 0)$.

6. Studiare le curve che si ottengono tagliando la superficie S di equazione $3x^2 + 4z^2 = 12$ con i piani paralleli ai piani coordinati. Da questo studio ricavare quale tipo di quadrica sia la superficie S. Trovare delle equazioni parametriche di S. Verificare che la curva (*elica*) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = t \\ z = \sqrt{3}\sin t \end{cases}, \text{ per } t \in \mathbb{R},$$

giace su S e trovare la retta tangente a questa curva nel punto (2,2π,0).

7. *Dalla prova scritta del 21 marzo 2006*. (a) Nello spazio è assegnata la quadrica di equazione $64x^2 + z^2 = 4y$. Spiegare perché basta studiare le sue sezioni con i piani paralleli agli assi coordinati x, z per dedurre che si tratta di un paraboloide ellittico.
(b) Scrivere le equazioni parametriche della conica C che è l'intersezione del piano $y = 1$ con la quadrica di equazione $64x^2 + z^2 = 4y$.
(c) Trovare un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per il cilindro con generatrici parallele all'asse delle y la cui intersezione con il piano $y = 1$ è la conica C studiata nel punto (b).
(punti 2 + 2 + 2)

8. *Dalla prova d'esame dell'11 settembre 2006*. a. Stabilire per quali valori del parametro k l'equazione $x^2 + k(y + 3k)^2 = 9k$ rappresenta delle ellissi non degeneri, e trovare i centri ed i vertici di tali ellissi.
b. Nello spazio, riferito a coordinate x,y,z, è assegnata la quadrica Q d'equazione
$$x^2 + 3(y + 9)^2 = 27 .$$
Descriverla brevemente, e, utilizzando i risultati precedenti, studiare l'intersezione di questa quadrica con il piano $z = 0$.
c. Trovare delle equazioni parametriche della quadrica Q.
(punti 3 + 2 + 1)

9. La curva di equazioni parametriche, nel parametro reale t,
$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 ,$$
ha il nome di "cubica gobba".
   a) Giustificare questo nome dimostrando che la curva non è contenuta in nessun piano e che ogni piano la interseca in - al più - tre punti.
   b) Trovare delle equazioni che rappresentino la retta tangente alla cubica gobba in (1/2, 1/4, 1/8).
   c) Verificare che la cubica gobba giace su un cilindro parabolico: quale?