

### 13. Determinante di una matrice quadrata.

Si richiama la definizione di determinante per matrici quadrate di ordine uguale a 2 o a 3.

Data una matrice quadrata  $\mathbf{A}$ , di ordine  $n$ , con righe  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$ , il determinante di  $\mathbf{A}$  è un numero caratterizzato dalle proprietà:

1. Se in  $\mathbf{A}$  si scambiano due righe, il determinante cambia di segno,
2. se una qualunque riga è moltiplicata per uno scalare  $k$ , il determinante viene moltiplicato per  $k$ ,
3. se  $\mathbf{a}^i = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , detta  $\mathbf{B}$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  sostituendo la riga  $i$ -esima con  $\mathbf{u}$ , e chiamata  $\mathbf{C}$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  sostituendo la riga  $i$ -esima con  $\mathbf{v}$ , si ha  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) + \det(\mathbf{C})$ ,
4.  $\det(\mathbf{I}_n) = 1$ .

In questo corso, non è possibile dimostrare che il determinante di una qualunque matrice quadrata può essere calcolato con lo “sviluppo di Laplace” per righe o per colonne, **come indicato nel paragrafo 6 del capitolo 3 di [testo]**.

Per il calcolo con lo sviluppo di Laplace, è necessaria la definizione di “complemento algebrico” (def. 6.2 di [testo]).

Si definisce (vedi [testo], cap. 3, n. 1, pag. 102) la “trasposta”  $\mathbf{A}^T$  di una matrice  $\mathbf{A}$ . **Non viene data la dimostrazione della proprietà:**

5.  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$ .

Dalle proprietà 1, 2, 3 si deducono alcune conseguenze, utili nel seguito.

**Corollario 1.** Se nella matrice  $\mathbf{A}$  ci sono due righe uguali, allora  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

**Dimostrazione:** per la proprietà 1, scambiando le due righe il determinante cambia nel suo opposto, ma siccome le righe sono uguali, il determinante non cambia, quindi è l'unico numero uguale al suo opposto, cioè 0.

C.v.d.

**Corollario 2.** Se ad una riga  $\mathbf{a}^i$  si sostituisce il vettore riga  $\mathbf{a}^i + k \mathbf{a}^j$  ( $k$  scalare), per  $j \neq i$ , il determinante non cambia.

**Dimostrazione.** Per la proprietà 3, il determinante della nuova matrice è la somma di  $\det(\mathbf{A})$  e del determinante di una matrice  $\mathbf{C}$ , in cui la riga  $i$ -esima è un multiplo della riga  $j$ -esima; per la proprietà 2 e per il corollario 1,  $\det(\mathbf{C}) = 0$ , quindi il determinante della nuova matrice è uguale a  $\det(\mathbf{A})$ .

C.v.d.

**Corollario 3.** Sia  $\mathbf{S}$  una matrice a scalini ottenuta da  $\mathbf{A}$ , per mezzo di un procedimento di eliminazione di Gauss; allora  $\det(\mathbf{A}) = 0$  se e solo se  $\det(\mathbf{S}) = 0$ .

**Dimostrazione.** Un procedimento di eliminazione di Gauss consiste nell'applicazione ripetuta di

- a) scambio di righe: questa operazione, per la proprietà 1, cambia di segno il determinante
- b) moltiplicazione di una riga per uno scalare  $k$  diverso da zero: per la proprietà 2, questa mossa ha l'effetto di moltiplicare il determinante per lo scalare  $k$
- c) sostituzione di una riga  $\mathbf{a}^i$  con  $\mathbf{a}^i + k \mathbf{a}^j$ , che per il corollario 2 non altera il determinante.

In conclusione, esiste uno scalare  $h$ , diverso da 0, per cui  
 $\det(\mathbf{A}) = h \det(\mathbf{S})$ ;  
quindi se uno dei due determinanti è nullo, lo è anche l'altro.

C.v.d.

**Corollario 4.**  $\mathbf{A}$  è singolare se e solo se  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

**Dimostrazione.** Se  $\mathbf{A}$  è singolare, una sua forma a gradini  $\mathbf{S}$  contiene almeno una riga di zeri, e quindi  $\det(\mathbf{S}) = 0$ ; per il corollario 3, anche  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

Viceversa, se  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , per il corollario 3 anche il determinante di una sua riduzione a scalini è uguale a zero; ma allora il numero dei pivots è minore dell'ordine della matrice, e quindi il rango di  $\mathbf{A}$  non è il massimo possibile.

C.v.d.

**Corollario 5.** Le proprietà del determinante relative alle righe di una matrice sono valide anche per le colonne.

**Dimostrazione.** Per la proprietà 5, il determinante non cambia se si scambiano le righe con le colonne; quindi le proprietà 1, 2, 3 e quelle di cui nei corollari 1, 2 valgono anche per le colonne.

C.v.d.

**Corollario 6.**  $\det(\mathbf{A}) = 0$  se e solo se le sue righe o le sue colonne sono vettori linearmente dipendenti.

**Dimostrazione.** La condizione di dipendenza lineare tra le colonne di  $\mathbf{A}$  conduce al sistema lineare omogeneo  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , che ha soluzione non banale se e solo se il rango di  $\mathbf{A}$  non è massimo, ovvero, per il corollario 4, se e solo se  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

Poiché le righe di  $\mathbf{A}$  sono le colonne di  $\mathbf{A}^T$ , sulle righe si può ripetere il ragionamento precedente sostituendo ad  $\mathbf{A}$  la sua trasposta, e ricordando la proprietà 5.

C.v.d.

## 14. Uso dei determinanti in geometria analitica.

### 1. Volume del parallelepipedo.

Fissiamo nello spazio un riferimento cartesiano ortogonale, e come d'uso indichiamo con  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  i versori degli assi. Dati due vettori  $\mathbf{u} = (a, b, c)$ ,  $\mathbf{v} = (a', b', c')$ , ricordiamo che le componenti del loro prodotto vettoriale  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  si ricavano utilizzando le proprietà del prodotto vettoriale (vedi [testo], cap. 2, n. 3.12, pag. 60). Allargando la nozione di determinante ad una matrice "mista" (cioè, i cui elementi sono vettori in una riga, scalari nelle altre due) si ottiene, tramite lo sviluppo di Laplace, il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  come combinazione lineare dei versori fondamentali:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \mathbf{i}(bc' - b'c) + \mathbf{j}(ca' - ac') + \mathbf{k}(ab' - a'b).$$

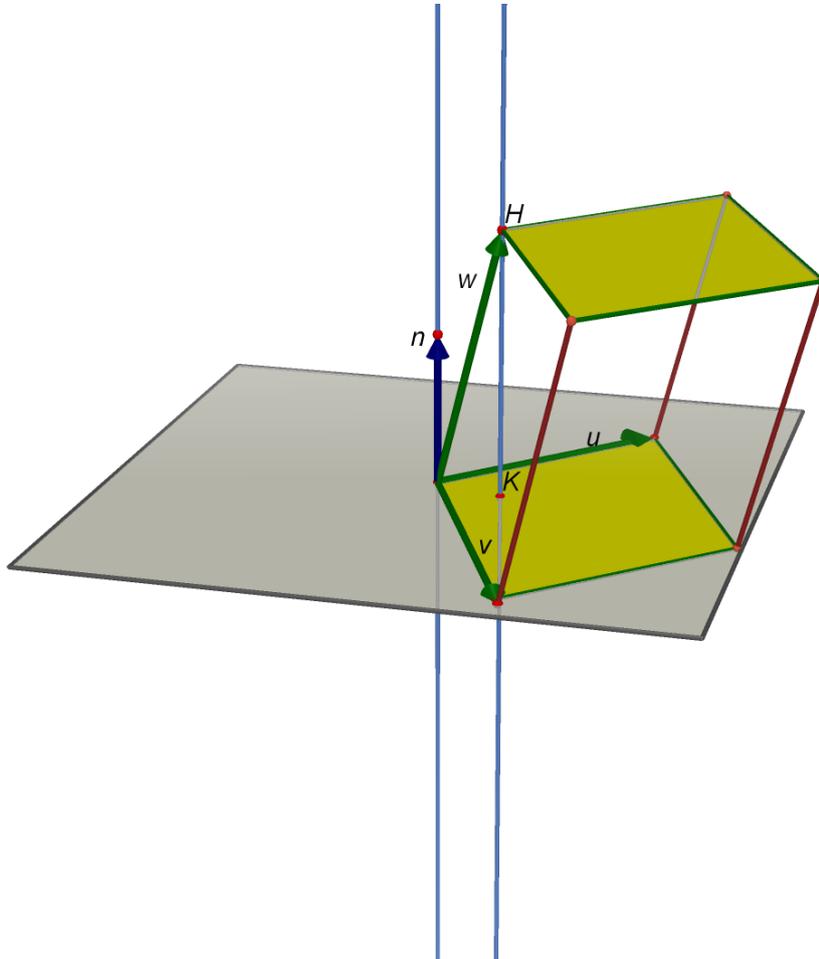
Preso un terzo vettore  $\mathbf{w} = (a'', b'', c'')$ , il suo prodotto scalare con  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  (o **prodotto misto dei tre vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$** ) è dato, quindi, da un determinante "ortodosso" (si sviluppi secondo la terza riga):

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo (si veda [testo] cap. 1, Def. 5.9, pag. 36) che  $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$  è l'area del parallelogrammo di lati  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , e che, dato un versore  $\mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n} \bullet \mathbf{w}|$  è la misura della proiezione ortogonale di  $\mathbf{w}$  sulla direzione di  $\mathbf{n}$  ([testo], cap. 1, Def. 5.1, pag. 33, cap. 2, E.3.3, pag. 63).

Se i tre vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  non appartengono allo stesso piano, essi determinano un unico parallelepipedo  $P$ , di cui possiamo calcolare il volume come prodotto dell'area  $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$  di una

faccia per l'altezza relativa a quella faccia, cioè per  $|\mathbf{n} \bullet \mathbf{w}|$ , con  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|}$ .



Si ha quindi:

$$\text{vol}(P) = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| \frac{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|} = \left| \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \right|.$$

Da questa interpretazione del determinante come volume (a meno del segno) si può ricavare una diversa dimostrazione del **corollario 6**, per il caso di matrici di ordine 3.

## 2. Equazione del piano e condizione di complanarità.

Dato un punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , il piano passante per  $P_0$  e parallelo ai vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  ha come direzione normale quella di  $\mathbf{n} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  e quindi (vedi [testo], cap. 2, n. 5, pag. 78-79) ha equazione

$$\mathbf{n} \bullet (\overline{OP} - \overline{OP}_0) = 0, \text{ cioè } \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \bullet (\overline{OP} - \overline{OP}_0) = 0.$$

Dalle considerazioni precedenti, sul significato geometrico del prodotto misto di tre vettori, oppure dal corollario 6, si ricava l'**equazione del piano** per  $P_0$  e parallelo ai vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  in **forma di determinante**:

$$\det \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0 .$$

Ricordiamo che se tre punti  $A, B, C$  non sono allineati, essi determinano un piano, che è parallelo ai vettori  $\mathbf{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \mathbf{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ ; il piano dei punti  $A, B, C$  ha quindi l'equazione

$$\det \begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{pmatrix} = 0 .$$

Se ne deduce la **condizione di complanarità** per 4 punti: i punti  $A, B, C, D$  appartengono ad uno stesso piano se e solo se è

$$\det \begin{pmatrix} x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{pmatrix} = 0 .$$

**In modo analogo**, si ha che, nel piano riferito a coordinate  $x, y$ , l'equazione della retta per i punti distinti  $A, B$  è

$$\det \begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{pmatrix} = 0 .$$

**Come esercizio** (da non trascurare!), ragionando in analogia al caso della complanarità, si trovi la condizione di allineamento di tre punti nel piano.