15. Ancora sull’uso del rango e dei determinanti in geometria analitica.

Per completezza di informazione, ricordiamo rapidamente il teorema di Cramer e la regola di Cramer: *le componenti della soluzione di un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti sia quadrata non degenere si esprimono come quozienti di determinanti.*
Usiamo le conoscenze che abbiamo acquisito, a proposito di sistemi lineari e determinanti, per risolvere i problemi:

1. come si stabilisce se dei vettori sono linearmente dipendenti (esempio: l’esercizio 5 della prova del 17 febbraio).
2. Quale o quali condizioni sui ranghi delle matrici costruite con i coefficienti delle equazioni caratterizzano:
   - **a)** due piani paralleli,
   - **b)** due piani incidenti,
   - **c)** due rette parallele,
   - **d)** due rette sghembe,
   - **e)** tre piani appartenenti ad uno stesso fascio.

1. L’esercizio 5 della prova del 17 febbraio chiede:

stabilire se esistano valori del parametro h per i quali i vettori

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\h\\3\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

siano linearmente dipendenti; per quei valori di h, esprimere uno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri due.

Per definizione, i vettori **u, v, w** sono linearmente dipendenti se esistono degli scalari x, y, z, non tutti uguali a 0, tali che si abbia

$$(*)\quad x\,\mathbf{u}+y\,\mathbf{v}+z\,\mathbf{w}=\mathbf{0}.$$

L’equazione vettoriale (*) equivale al sistema lineare omogeneo

$$(**)\quad \begin{cases}x-3y=0\\hx+2y+4z=0\\3x+y+2z=0.\end{cases}$$

Dunque, i vettori **u, v, w** sono linearmente dipendenti se il sistema (**) ammette soluzioni non banali (*autosoluzioni*); dalla teoria dei sistemi lineari, sappiamo che ciò accade se la matrice dei coefficienti ha rango minore del numero delle incognite. In questo caso, ciò equivale a dire che vi sono soluzioni non banali se è singolare la matrice che ha come colonne le componenti di **u, v, w**.
Riduciamo a scalini la matrice dei coefficienti del sistema (**)[1]:

$$\begin{pmatrix}1&-3&0\\h&2&4\\3&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&2+3h&4\\0&10&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&5&1\\0&2+3h&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&5&1\\0&0&18-3h\end{pmatrix}.$$

La matrice del sistema è singolare soltanto se è h = 6; quindi, **u, v, w** sono linearmente dipendenti solo per h = 6, e in questo caso il sistema (**) è equivalente al sistema

[1] *Conviene far in modo, usando le operazioni consentite, che i pivot siano, nel maggior numero possibile, indipendenti dal parametro.*

$$(***)\ \begin{cases} x-3y=0 \\ 5y+z=0 \end{cases}$$

che ha le infinite soluzioni ($-3t/5$, $-t/5$, t), con t numero reale. Sostituendo questi valori in (*) si ricava

$$-\frac{3}{5}\mathbf{u}-\frac{1}{5}\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0},$$

che permette di scrivere, ad esempio:

$$\mathbf{w}=\frac{3}{5}\mathbf{u}+\frac{1}{5}\mathbf{v}.$$

2.a. Due piani

π, di equazione $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$,
π', di equazione $a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$,

sono paralleli se e soltanto se il rango della matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ è uguale a 1: infatti in tal caso il sistema lineare formato dalle equazioni dei due piani o è impossibile (i piani sono paralleli in senso stretto) oppure ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri (i due piani coincidono).

2.b. Due piani

π, di equazione $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$,
π', di equazione $a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$,

sono incidenti se e soltanto se il rango della matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ è uguale a 2: infatti in tal caso il sistema lineare formato dalle equazioni dei due piani ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro (le soluzioni forniscono delle equazioni parametriche della retta intersezione dei due piani).

2.c. Due rette, di equazioni cartesiane rispettivamente $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$, $\begin{cases} a''x+b''y+c''z=d'' \\ a'''x+b'''y+c'''z=d''' \end{cases}$, sono parallele se e soltanto se la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 2.

Infatti, le due rette sono tra loro parallele se, e soltanto se, sono parallele ad una medesima retta che passi per l'origine. Le rette passanti per l'origine e parallele alle due rette date sono individuate dalle equazioni omogenee $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} a''x+b''y+c''z=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z=0 \end{cases}$; il sistema omogeneo, formato da queste quattro equazioni, ha infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro, se, e soltanto se, il rango della matrice dei coefficienti vale 2.

2.d. Due rette, di equazioni cartesiane rispettivamente $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$,

$\begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$, sono sghembe se e soltanto se è $\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix} \neq 0$.

Infatti, se le due rette sono sghembe,

- esse non sono parallele, quindi (per 2.c) la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$ ha rango 3
- e non hanno intersezioni, quindi il sistema (°) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$ è incompatibile, e allora, per il teorema di Rouché-Capelli, il rango della matrice completa è 4.

Viceversa, se la matrice completa del sistema (°) è non singolare, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è incompatibile, dato che il rango della matrice dei coefficienti non può essere maggiore di 3; le due rette quindi non hanno intersezioni. Ma il rango della matrice dei coefficienti non può essere inferiore a 3, altrimenti la matrice completa sarebbe singolare; quindi, per 2.c, le rette non sono parallele: in conclusione, le rette sono sghembe.

2.e. Tre piani distinti

π, di equazione $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$,
π', di equazione $a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$,
π'', di equazione $a''\,x + b''\,y + c''\,z + d'' = 0$,

appartengono ad uno stesso fascio (proprio o improprio) se e soltanto se la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 2.

Osserviamo preliminarmente che, se i piani sono distinti, i coefficienti delle tre equazioni non sono tutti proporzionali, quindi nella riduzione a scalini della matrice considerata appaiono almeno 2 pivot.
Consideriamo il sistema formato dalle equazioni dei tre piani, del quale la matrice considerata è la matrice completa.
Sia, per ipotesi, uguale a 2 il rango della matrice incompleta.

- Se anche il rango della matrice incompleta è 2, allora il sistema ha infinite soluzioni, quindi i piani appartengono ad uno stesso fascio proprio;
- se invece il rango della matrice incompleta è uguale a 1, il sistema è incompatibile, quindi i tre piani appartengono a un fascio improprio.

Viceversa, supponiamo che i piani appartengano ad uno stesso fascio.

- Se i piani sono paralleli, hanno vettori normali tra loro proporzionali, quindi la matrice incompleta del sistema ha rango uguale a 1, ma, essendo i piani distinti, i termini noti non sono tutti proporzionali, perciò la matrice completa ha rango uguale a 2;
- se i piani appartengono ad un fascio proprio, il sistema deve avere infinite soluzioni dipendenti da un parametro, quindi il rango delle matrici (completa e incompleta) è 2.