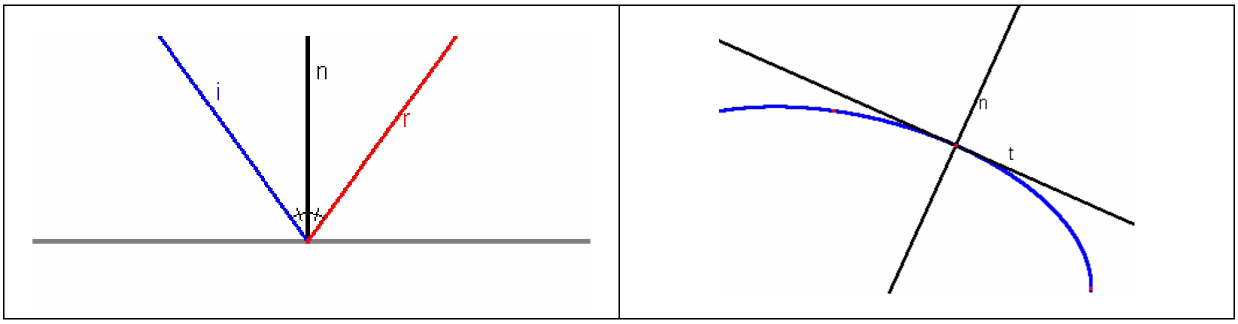
19. Vettore tangente a una curva parametrizzata. Proprietà focali. Cambiamenti di coordinate cartesiane nel piano.

Dopo aver definito "curve parametrizzate" nello spazio, si giustifica la definizione di retta tangente ad una curva. Per i particolari, nel caso del piano, vedere [testo] cap. 4, E.2. Gli altri temi affrontati nelle lezioni 19 e 20 *non sono riportati in* [testo], ma ad esempio in
P. Maroscia, Introduzione alla geometria e all'algebra lineare, Zanichelli, Bologna, 2000, Appendice B, oppure in E. Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri, Torino, 1989, n. 31.

19.1 Proprietà focali.

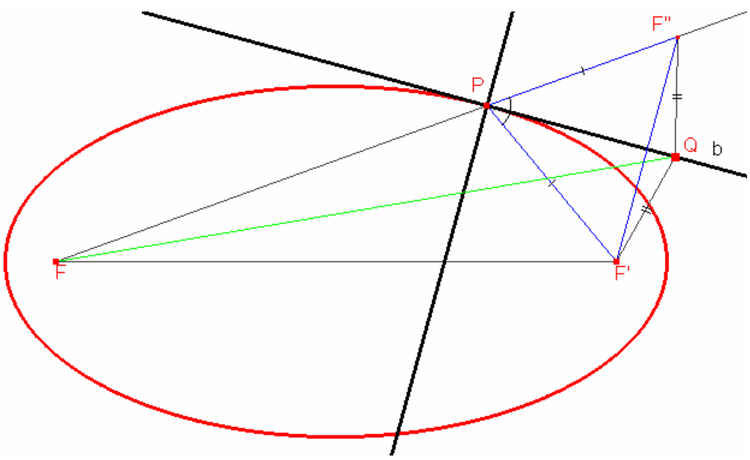
Dallo studio della Fisica, sappiamo che il fenomeno della riflessione segue la legge di Cartesio: il raggio incidente ed il raggio riflesso formano angoli uguali con la retta normale alla superficie riflettente.



Se lo specchio non è piano, la legge di Cartesio è ancora valida: nel punto considerato, la superficie riflettente è approssimata dal suo piano tangente, quindi si considera come retta normale alla superficie la retta perpendicolare al piano tangente.
Le lampade ellittiche e le camere a volta ellittica sfruttano una proprietà dell'ellisse che permette di prevedere come verrà riflesso un raggio originato in un fuoco. Per dimostrare la proprietà, occorrono soltanto conoscenze di geometria elementare del piano, precisamente:

- due rette incidenti individuano quattro angoli, le cui bisettrici sono due rette tra loro perpendicolari
- la perpendicolare ad un segmento nel suo punto medio (*asse del segmento*) è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento
- in un triangolo isoscele, l'asse della base coincide con la bisettrice dell'angolo opposto alla base
- in un qualsiasi triangolo, un lato è minore della somma degli altri due (*disuguaglianza triangolare*).

Proposizione. *Le rette che congiungono un qualunque punto P di un'ellisse con i due fuochi hanno come bisettrici la tangente e la normale all'ellisse in P.*
Dimostrazione. Fissati i due fuochi F, F' e una costante positiva $2a$ (maggiore della distanza tra i fuochi), è determinata l'ellisse, come il luogo dei punti P per i quali è $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$.



Sia P un punto qualsiasi sull'ellisse. Sulla retta FP, prendiamo il punto F'' che si trova dall'altra parte di F rispetto a P e per il quale è $\overline{PF''} = \overline{PF'}$. Chiamiamo b la bisettrice dell'angolo con vertice P del triangolo isoscele $PF'F''$; b è anche asse del segmento F', F''.
Vogliamo far vedere che b non ha altri punti in comune con l'ellisse oltre a P, quindi è tangente all'ellisse in P. Sia Q un punto qualsiasi di b, diverso da P; calcoliamo la somma $\overline{QF} + \overline{QF'}$ delle sue distanze dai fuochi. Poiché Q appartiene all'asse del segmento $F'F''$, si ha:

$$\overline{QF} + \overline{QF'} = \overline{QF} + \overline{QF''}.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare al triangolo QFF'' si ottiene:

$$\overline{QF} + \overline{QF''} > \overline{FF''} = 2a .$$

Si conclude che è

$$\overline{QF} + \overline{QF'} > 2a ,$$

quindi Q non appartiene all'ellisse.

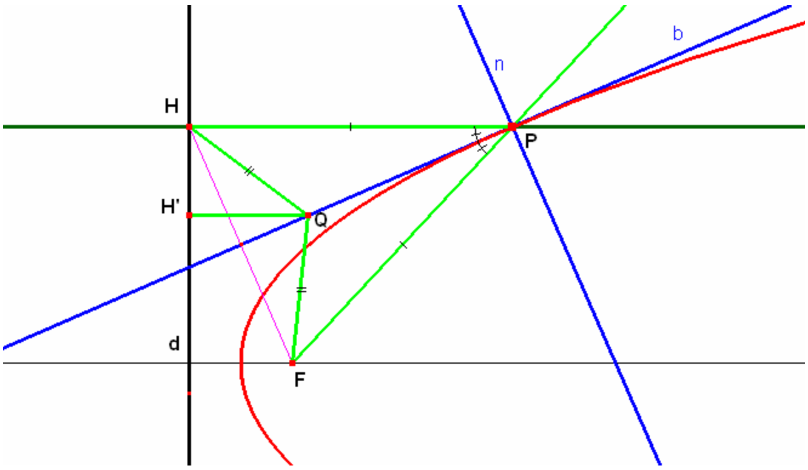
C.v.d.

Anche l'iperbole ha una proprietà analoga: l'enunciato e la dimostrazione sono del tutto simili a quelli relativi all'ellisse. Nel caso della parabola, vale la proprietà per cui si costruiscono antenne, fari, specchi parabolici: un raggio parallelo all'asse della parabola viene riflesso in un raggio che passa per il fuoco.

Proposizione. *La retta che congiunge un punto P qualunque di una parabola con il fuoco e la retta per P perpendicolare alla direttrice hanno come bisettrici la tangente e la normale alla parabola in P.*

Dimostrazione. Il lettore è invitato ad adattare la dimostrazione precedente, sfruttando l'eguaglianza delle distanze di P dal fuoco F e dalla direttrice d, e ricordando che un triangolo rettangolo (come $QH'H$) l'ipotenusa è maggiore di ogni cateto; allora ogni punto Q, diverso da P, sulla bisettrice dell'angolo al vertice nel triangolo isoscele PFH, ha distanza da F maggiore della distanza da d.

C.v.d.

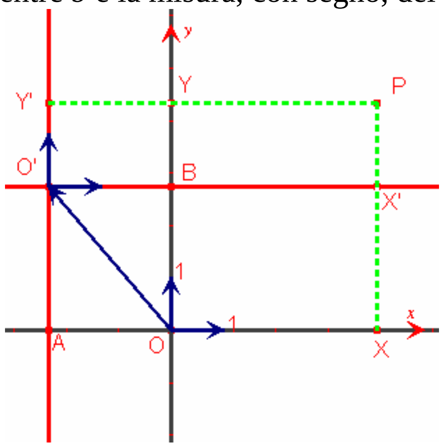


19.2. Cambiamenti di coordinate cartesiane nel piano.

Ci occupiamo soltanto di cambiamenti di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche. Lasciando immutata l'unità di misura, si può cambiare il sistema di riferimento o scegliendo un'origine diversa senza mutare la direzione e l'orientazione degli assi coordinati, o cambiando gli assi senza mutare l'origine, oppure cambiando insieme sia l'origine sia la direzione degli assi.

Se su cambia solo l'origine, traslando gli assi, quale relazione c'è tra le coordinate di uno stesso punto P nei due diversi sistemi Oxy e $O'x'y'$? Siano (a,b) le coordinate, nel riferimento

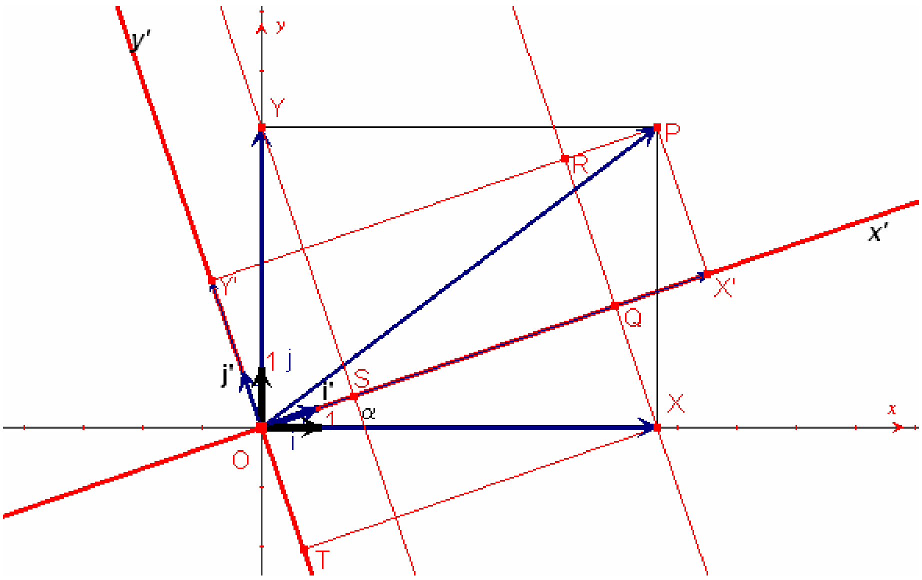
Oxy, della nuova origine *O'*. Nelle notazioni della figura qui sotto, *a* è la misura, con segno, del segmento orientato *OA*, mentre *b* è la misura, con segno, del segmento orientato *OB*.



Ragionando sulle relazioni tra i segmenti orientati *O'X'*, *O'Y'*, *OX*, *OY*, le cui misure (con segno) sono le coordinate del punto *P* nei due sistemi di riferimento, si trova

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}.$$

Esaminiamo ora il caso in cui non si cambi l'origine. Dato il riferimento *Oxy*, scegliamo come nuovo asse *x'* delle ascisse una retta orientata per *O*, che forma con il vecchio asse *x* l'angolo α; il nuovo asse delle ordinate è l'unica retta orientata che forma con *x'* l'angolo $\pi/2$.
Le relazioni tra le coordinate *x'*, *y'* e le coordinate *x*, *y* di uno stesso punto *P* si trovano usando solo nozioni fondamentali di trigonometria. La figura può servire per ricordare che la proiezione di una somma vettoriale è la somma delle proiezioni degli addendi; su questo fatto abbiamo basato le proprietà del prodotto scalare (cfr. [testo] Cap. 1, n. 5).



Proiettando ortogonalmente il vettore $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$ sulla retta orientata che è il nuovo asse delle ascisse otteniamo:

$$x' = \overrightarrow{OP} \bullet \mathbf{i}' = (\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}) \bullet \mathbf{i'} = x\mathbf{i} \bullet \mathbf{i}' + y\mathbf{j} \bullet \mathbf{i'} = x\cos\alpha + y\sin\alpha\,.$$

In modo analogo si trova

$$y' = \overrightarrow{OP} \bullet \mathbf{j}' = (\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}) \bullet \mathbf{j'} = x\mathbf{i} \bullet \mathbf{j'} + y\mathbf{j} \bullet \mathbf{j'} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\,.$$

Infine, mettendo insieme queste ultime relazioni con le (1), **si ottiene la dimostrazione** del

Teorema: la relazione tra le coordinate cartesiane di uno stesso punto del piano in due diversi sistemi ortogonali e monometrici *Oxy*, *O'x'y'* è

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + d \end{cases}$$

o, in forma più compatta

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

cioè

$$(2') \qquad \mathbf{X'} = \mathbf{MX} + \mathbf{T}, \text{ con } \mathbf{MM^T} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{M}) = 1.$$

Da (2') si ricava che il cambiamento di coordinate inverso è dello stesso tipo:

$$(2'') \qquad \mathbf{X} = \mathbf{M^T X'} + \mathbf{B}, \text{ con } \mathbf{B} = -\mathbf{M^T T}.$$

20. Classificazione delle curve del secondo ordine.

Definizione. Si chiama *curva di secondo ordine* (o secondo grado) un insieme di punti del piano le cui coordinate soddisfano una equazione di secondo grado

$$(3) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Sono esempi di curve di secondo grado l'ellisse, la parabola, l'iperbole: infatti, se per esempio nella (3) si pone $a_{11} = 1/a^2$, $a_{22} = 1/b^2$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -1$, si ottiene l'equazione canonica di una ellisse; analogamente, per scelte opportune si ottengono le equazioni canoniche di iperbole e di parabola.

Sono curve di secondo ordine anche quelle definite dalle equazioni:

$$(4)\ \ x^2 - y^2 = 0, \qquad (5)\ \ (x + y)^2 = 0, \qquad (6)\ \ x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

La curva di equazione (4) è costituita da tutti i punti di due rette, precisamente le due bisettrici degli assi; la curva di equazione (5) contiene i punti di una sola delle bisettrici degli assi; non vi è nessun punto le cui coordinate soddisfacciano l'equazione (6), che quindi definisce l'insieme vuoto.
Nei casi (4), (5) il polinomio di secondo grado al primo membro dell'equazione è "*riducibile*", cioè si può scrivere come prodotto di due polinomi di primo grado; anche la curva si chiama *riducibile*, oppure *spezzata*, perché è costituita da due rette (anche coincidenti).

Come si fa, per riconoscere quali equazioni di tipo (3) definiscano delle "non-curve" come nei casi speciali (4), (5), (6)? Ci sono altre curve, di tipi diversi da quelli incontrati finora, che hanno equazioni di secondo grado? Per risolvere questi problemi, ricorriamo all'idea che sta alla base del metodo delle coordinate: sfruttare la libertà di scelta del sistema di riferimento, per passare da una data equazione ad un'altra che rappresenti lo stesso oggetto geometrico e che, essendo più semplice, permetta di ricavare facilmente le proprietà dell'insieme di punti definito dall'equazione.

L'equazione generale di secondo grado (3) può essere scritta in altri modi:

I. ponendo $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$, si ottiene

$$(7)\ \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A_0}\mathbf{X} + 2\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{X} + a_{33} = 0,\ \mathbf{A_0} = \mathbf{A_0^T}$$

II. detta **A** la matrice **simmetrica** dei coefficienti a_{ik} dell'equazione (3), si può riscrivere la (3) nella forma:

$$(8)\ \begin{pmatrix}\mathbf{X}^{\mathbf{T}} & 1\end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ 1\end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}.$$

Un cambiamento di coordinate (2") agisce sull'equazione (3) trasformandola in una diversa equazione, **ancora di secondo grado**, nelle nuove coordinate: $a'_{11}(x')^2 + \ldots\ldots = 0$.
Esistono dei caratteri delle due equazioni che si conservano nei cambiamenti di coordinate, così come si conserva la forma della curva (ad esempio, la forma dell'ellisse non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, ma dalla distanza focale e dalla lunghezza dell'asse maggiore). Questi caratteri, che sono delle funzioni dei coefficienti dell'equazione, si chiamano ***"invarianti"*** dell'equazione, o della curva definita dalla (3).

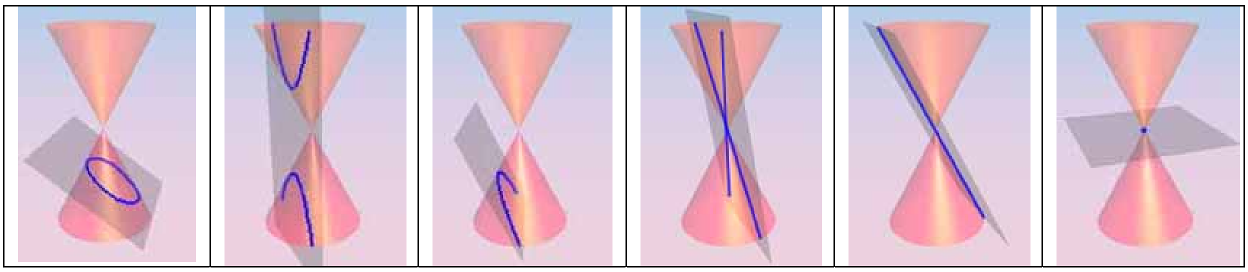
Lasciamo al corso di Algebra Lineare il compito di dimostrare il
Teorema: *un cambiamento di coordinate cartesiane ortogonali monometriche* (2) *trasforma l'equazione di secondo grado* (7), *o* (8), *in un'altra equazione di secondo grado*

$$\mathbf{X}'^{\mathbf{T}}\mathbf{A}'_0\mathbf{X}' + 2\mathbf{B}'^{\mathbf{T}}\mathbf{X}' + a'_{33} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}'^{\mathbf{T}} & 1\end{pmatrix}\mathbf{A}'\begin{pmatrix}\mathbf{X}'\\ 1\end{pmatrix} = 0 \text{, con } \mathbf{A'_0} = \mathbf{A'_0}^{\mathbf{T}},\ \mathbf{A'} = \mathbf{A'}^{\mathbf{T}}$$

lasciando invariati

1. *il rango della matrice dei coefficienti:* rango(**A**) = rango(**A'**)
2. *il segno del determinante della matrice dei coefficienti dei termini di secondo grado (complemento algebrico dell'elemento di posto* 3,3), *cioè*
   è $\det(\mathbf{A_0}) = \mathbf{A}_{33} > 0, = 0, < 0$ se e solo se è $\det(\mathbf{A}'_{\mathbf{0}}) = \mathbf{A}'_{33} > 0, = 0, < 0$
3. *l'eventuale annullarsi della traccia di* $\mathbf{A_0}$, *cioè*
   $a_{11} + a_{22} = 0$ se e solo se $a'_{11} + a'_{22} = 0$.

Fu Apollonio di Perga (252-190 a.C.) a dare il nome di "**sezioni coniche**" alle curve che si ottengono intersecando un cono circolare con un piano e, studiandole, a riconoscere che tra queste sezioni compaiono ellissi, parabole, iperboli, oltre a "curve degeneri"[1].



Il *teorema di classificazione* stabilisce che le curve del secondo ordine (tutte, fuorché un tipo di curva degenere) coincidono con le sezioni coniche; le curve del secondo ordine vengono per questo chiamate "**coniche**".

Definizioni. S*e è* rango(**A**) = 3, *la conica si dice* ***non degenere***, *o irriducibile, o non specializzata. Se è* rango(**A**) = 2, *la conica è detta* ***semplicemente specializzata***; *se è* rango(**A**) = 1, *doppiamente specializzata.*
Un'iperbole è chiamata ***equilatera*** *se i suoi asintoti sono perpendicolari.*

[1] Immagini da http://math2.org/math/algebra/conics.htm

La dimostrazione del *teorema di classificazione* consiste nel mostrare come, *a seconda del segno di* $\mathbf{A}_{33}$ *e del valore del rango di* **A**, sia possibile trovare un sistema di riferimento in cui una data curva del secondo ordine abbia un’equazione particolarmente semplice, detta “canonica”. **Diamo un’idea di una parte della dimostrazione,** quella che esamina le ipotesi:

- **A** ha rango massimo,
- $\mathbf{A}_{33} \neq 0$.

Sostituendo le (2) nell’equazione (3), si nota che i coefficienti dei termini lineari nella nuova equazione sono

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{11}c + a_{12}d + a_{13} \\ a'_{23} &= a_{12}c + a_{22}d + a_{23} \end{aligned}.$$

Se questi due coefficienti fossero uguali a 0, la nuova equazione rappresenterebbe una curva per la quale l’origine è *centro* di simmetria. Per far sì che i due coefficienti siano uguali a 0 occorre che (c,d) sia soluzione del sistema lineare $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$. Per la teoria dei sistemi lineari, se è $\mathbf{A}_{33} \neq 0$ allora il sistema ha una unica soluzione; in questo caso, la curva ha un centro di simmetria. Si dimostra poi che esiste una scelta dell’angolo α, che compare in (2), per cui nella nuova equazione si avrà $a'_{12} = 0$. Infine, se **A** è non degenere, il termine noto dell’equazione finale è diverso da zero, quindi ci si riduce a un’equazione del tipo

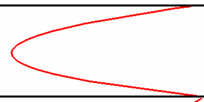
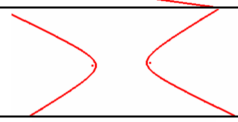
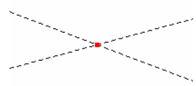
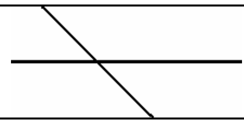
$$A\,x^2 + B\,y^2 = 1.$$

Considerando i segni dei coefficienti *A, B* si conclude che l’equazione può rappresentare o l’insieme vuoto, o un’ellisse o un’iperbole. Si vede ancora che se è $a_{11} + a_{22} = 0$, allora la conica è un’iperbole equilatera.
Ragionamenti analoghi mostrano che se si parte dalle ipotesi

- **A** ha rango massimo,
- $\mathbf{A}_{33} = 0$

si può trovare un sistema di riferimento in cui l’equazione coincide con la forma canonica dell’equazione della parabola.

L’enunciato completo del **teorema di classificazione delle coniche** è riassunto dalla tabella:

rango di A	$\mathbf{A}_{33}$	**Nome**	**Equazione canonica**	**Forma**
3	> 0	Ellisse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ ellisse immaginaria	Insieme vuoto
	= 0	Parabola	$y^2 = 2px$	
	< 0	Iperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
2	> 0	Punto	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ rette complesse coniugate, incidenti in (0,0)	
	= 0	Rette parallele	$y^2 = a^2$	
			$y^2 + a^2 = 0$ parallele immaginarie	Insieme vuoto
	< 0	Rette incidenti	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
1	= 0	Retta doppia	$y^2 = 0$	