4. Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$.
5. Equazioni parametriche di rette e di piani. Uso del prodotto vettoriale.

Scegliere nello spazio un sistema di riferimento cartesiano (non necessariamente ortogonale né monometrico) *Oxyz* equivale a fissare tre vettori linearmente indipendenti **i, j, k** applicati in *O*; ne segue che il punto *P* di coordinate (x,y,z) individua, in maniera biunivoca, il vettore

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,.$$

E' definita così una bigezione tra $\mathcal{V}_O^3$ e $\mathbb{R}^3$, nella quale alla somma e al prodotto per uno scalare, di vettori geometrici applicati in *O*, corrispondono somma e prodotto per uno scalare di terne ordinate. E' lecito, perciò, identificare un vettore di $\mathcal{V}_O^3$ con la terna delle sue componenti rispetto alla base $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.
Analogamente, $\mathcal{V}_O^2$ si identifica con $\mathbb{R}^2$.

Anche lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali è dotato delle operazioni di somma e di un prodotto per uno scalare, per le quali valgono le stesse proprietà della somma e del prodotto per uno scalare in $\mathcal{V}_O^3$.

Utilizzando le equazioni vettoriali di rette, introdotte nella lezione del 22 gennaio, si ottengono, nello spazio in cui sia fissato un sistema di coordinate cartesiane, le equazioni parametriche di una retta, individuata da un punto e da un vettore direttore, oppure determinata da due punti distinti.
Si ricavano le condizioni di parallelismo tra due rette, la nozione di retta orientata e di angolo tra due rette orientate.

Si utilizzano le equazioni vettoriali di piani, introdotte nella lezione del 22 gennaio, per ottenere le equazioni parametriche di piani, individuati da un punto e due vettori linearmente indipendenti, oppure individuati da tre punti non allineati.

Se due vettori sono linearmente indipendenti - e quindi generano un piano - il loro prodotto vettoriale è un vettore diverso da **0** (e solo in questo caso); dal calcolo delle componenti del prodotto vettoriale dei vettori (a,b,c), (a',b',c') (si veda la lezione del 22 gennaio), si ricava che essi sono linearmente indipendenti se e solo se è diverso da 0 almeno uno tra i tre numeri

$$bc'-b'c,\,-ac'+a'c,\,ab'-a'b\,.$$

L'area del parallelogramma individuato dai vettori **u,v** è $\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\|$, l'area del triangolo di vertici *A*,*B*,*C* è quindi $\frac{1}{2}\left\|(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\wedge(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\right\|$.

Per i dettagli, si veda per esempio [testo][1], cap. 2, n. 1, 2, 3, E3.

[1]Ricordiamo che [testo] sta per: S. Abeasis, *Geometria analitica del piano e dello spazio*, Zanichelli, 2002.