7. Equazioni cartesiane di un piano. Equazioni cartesiane di rette nello spazio.
8. Fasci di piani. Condizioni di parallelismo, condizioni di perpendicolarità.

Con procedimento analogo a quello usato per ottenere le equazioni delle rette nel piano, utilizziamo il prodotto scalare per ottenere un'equazione che *rappresenti* un piano, nello spazio in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano *Oxyz*, ortogonale e monometrico. Fissato un vettore **n =** (*a*,*b*,*c*), il piano che passa per l'origine ed è perpendicolare a **n** coincide con l'insieme dei punti *P*, di coordinate (*x*,*y*,*z*), per i quali è

$$\mathbf{n} \bullet \overrightarrow{OP} = 0 \ \text{ cioè } \ ax + by + cz = 0 \,.$$

Il piano passante per *Q* = (*x**,*y**) e perpendicolare a **n** è l'insieme di tutti i punti *P* per cui

$$\mathbf{n} \bullet (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) = 0 \ \text{ cioè } \ a(x - x^*) + b(y - y^*) + c(z - z^*) = 0,$$

ovvero

$$(1) \quad ax + by + cz + d = 0 \,.$$

Un piano α di equazione (1) ed un piano α' di equazione

$$(2) \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono paralleli se (e solo se) i rispettivi vettori normali **n, n'** sono linearmente dipendenti, cioè se

$$a : a' = b : b' = c : c'.$$

Se i piani α , α', di equazioni (1) e (2) rispettivamente, **non** sono paralleli, allora la loro intersezione è la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$, che ha come vettore direttore il vettore $\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'$.

Due piani non paralleli determinano un fascio proprio di piani.
Un fascio improprio di piani è l'insieme di tutti i piani paralleli ad un piano dato.

Due piani sono perpendicolari se tali sono i loro vettori normali; un piano ed una retta sono perpendicolari se il vettore direttore della retta e il normale al piano sono linearmente dipendenti.

Un piano ed una retta sono paralleli se il vettore direttore della retta è perpendicolare al vettore normale al piano.

Per i dettagli, si veda per esempio [testo], cap. 2, n. 5, E5, 6.