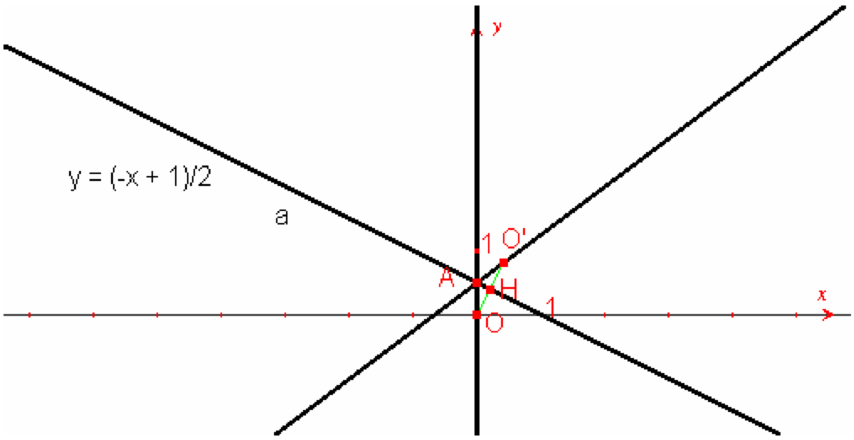
Esempi di svolgimento degli esercizi proposti per la prova intermedia del 17 febbraio 2009

1. *Ricordiamo che, assegnata nel piano una retta a, la simmetria (riflessione) rispetto ad a è l'applicazione del piano su se stesso che ad un qualsiasi punto P fa corrispondere quel punto P' per cui la retta a sia l'asse del segmento PP'. La simmetria rispetto ad a manda ogni punto di a in se stesso; manda i punti di una retta r nei punti di una retta r', che si chiama "simmetrica di r rispetto ad a".*
Nel piano, riferito ad un sistema cartesiano, di origine O con coordinate x,y, sia a la retta di equazione cartesiana $x + 2y - 1 = 0$. Scrivere delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana della retta simmetrica dell'asse delle y rispetto ad a.

Utilizzando le informazioni che precedono l'esercizio, si può osservare che per trovare la retta simmetrica dell'asse y rispetto ad a basta congiungere i simmetrici di due punti di y.



Il punto $A = (0,1/2)$, in cui l'asse delle y incontra la retta a, viene trasformato in se stesso dalla simmetria rispetto ad a. Sia $O = (0,0)$[1] ; il suo simmetrico, O' , si trova sulla retta perpendicolare ad a che passa per O, cioè sulla retta di equazioni parametriche

$$x = t,\ y = 2t.$$

Il punto H, in cui questa perpendicolare incontra a, corrisponde al valore di t che soddisfa l'equazione

$$t + 2(2t) - 1 = 0.$$

Ne segue che H ha coordinate $(1/5,2/5)$, quindi O' ha coordinate (b,c) tali che sia

$$\frac{1}{5} = \frac{b}{2}, \frac{1}{5} = \frac{c}{2}, \text{ da cui } b = \frac{2}{5}, c = \frac{4}{5}.$$

La retta cercata è parallela al vettore $\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OA} = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5} - \frac{1}{2}) = (\frac{2}{5}, \frac{3}{10})$, quindi ha equazioni parametriche, nel parametro reale s ,

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}s \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}s \end{cases}$$

[1] *scelta arbitraria, va bene qualsiasi altro punto sull'asse delle y!*

ed equazione cartesiana

$$3x - 4y + 2 = 0.$$

In alternativa, si può determinare la retta simmetrica di *y* come quella retta *r*, del fascio di centro ***A*,** che forma con *a* angoli uguali agli angoli formati da *y* con *a*. Indicati con (*l*,*m*) dei parametri direttori della retta *r*, deve essere

$$\cos(y,a) = \frac{(1,0)\bullet(2,-1)}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \cos(a,r) = \frac{(l,m)\bullet(2,-1)}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{5}} = \frac{2l-m}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{5}}.$$

Si ricava perciò l’equazione di secondo grado omogenea

$$l^2 + m^2 = (2l-m)^2$$

che equivale a

$$l(3l-4m) = 0.$$

La radice $l = 0$ corrisponde alla direzione dell’asse delle *y*; per $l = 4$, $m = 3$ si ottiene la retta cercata.

2. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane *Oxyz*, sono assegnati i punti

$$P = (-1,-2,0),\ Q = (0,1,-2),\ R = (1,-1,-2),\ S = (-2,-5,2).$$

A) Verificare che *P,Q,R,S* sono complanari e scrivere un’equazione cartesiana del piano che li contiene.
B) Che tipo di quadrilatero è quello che ha come vertici i punti *P,Q,R,S* ?
C) Calcolare l’area del triangolo *PQR.*

A) Per verificare che i punti dati sono complanari, trasliamo nell’origine i vettori $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ e controlliamo se sono linearmente dipendenti. Otteniamo:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1,3,-2),\ \mathbf{v} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (2,1,-2),\ \mathbf{w} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = (-1,-3,2).$$

Notiamo che è

$$\mathbf{u = - w\ ;}$$

ne deduciamo che i punti *P*,*Q*,*S* sono allineati, anzi che *P* è il punto medio di *Q* ed *S* **.**
Il piano che contiene i quattro punti ha quindi equazione

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \bullet (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) = 0, \text{ cioè } 4x + 2y + 5z + 8 = 0.$$

B) Avendo tre vertici allineati, il quadrilatero è degenere.

C) L’area del triangolo è $\frac{1}{2}\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

3. Rappresentare con equazioni cartesiane la retta che è la proiezione ortogonale dell’asse delle *z* sul piano di equazione $x + 2y - 1 = 0$.

La retta cercata appartiene sia al piano $x + 2y - 1 = 0$ sia al piano che contiene l’asse delle *z* ed è perpendicolare al precedente. Occorre perciò determinare, tra tutti i piani del fascio che ha come sostegno l’asse delle *z*

$$a\,x + b\,y = 0 \text{ (con } a, b \text{ non contemporaneamente nulli)},$$

quello il cui vettore normale (*a*,*b*,0) soddisfa la condizione

$$(a,b,0) \bullet (1,2,0) = a + 2b = 0\,.$$

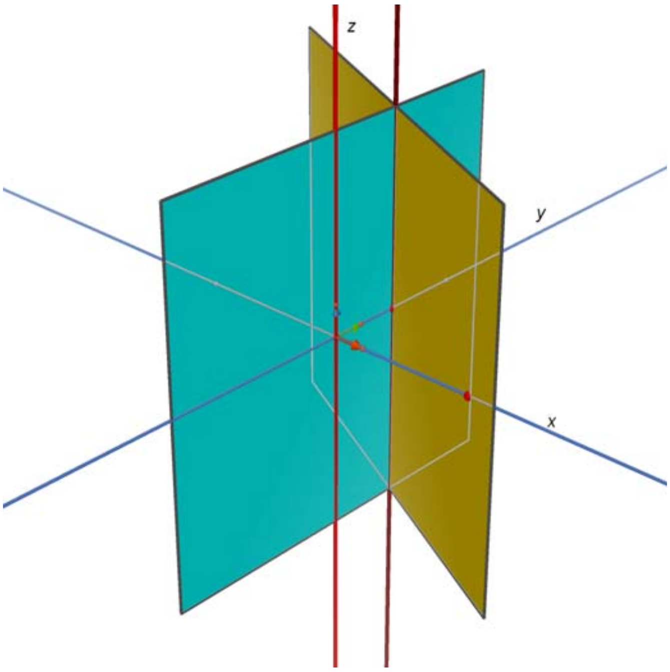
Si tratta quindi del piano del fascio che si ottiene per $a = -2$, $b = 1$, cioè del piano di equazione

$$-2\,x + y = 0.$$

La retta cercata ha le equazioni

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ -2x+y=0 \end{cases}, \text{ equivalenti alle } \begin{cases} x=1/5 \\ y=2/5. \end{cases}$$

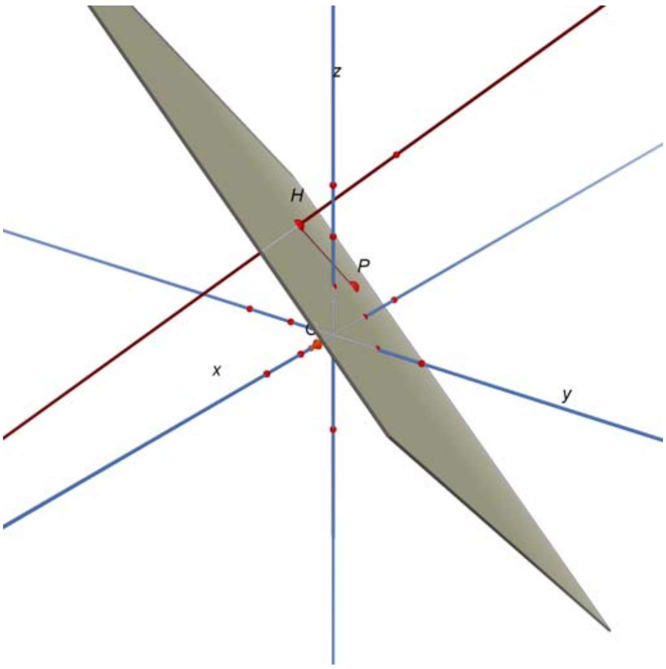
E' dunque una retta parallela all'asse delle *z*.



4. Determinare la distanza del punto $P = (-1,-2,0)$ dalla retta di equazioni parametriche (nel parametro reale λ)

$$x = -2 - \lambda,\ \ y = \lambda,\ \ z = 3 + \lambda.$$

Le rette che passano per P e sono perpendicolari alla retta data giacciono nel piano per P che ha come direzione normale quella della retta, cioè la direzione determinata da $(-1,1,1)$.



Un'equazione del piano per P perpendicolare alla retta è

$$(-1,1,1)\bullet(x+1,y+2,z)=-x+y+z+1=0.$$

Il punto comune a questo piano e alla retta è proprio la proiezione ortogonale, H, di P sulla retta: H si trova per quel valore di λ che soddisfa l'equazione

$$2+\lambda+3+\lambda+\lambda+1=0,$$

cioè per $\lambda=-2$; quindi H è il punto di coordinate $(0,-2,1)$.
La distanza tra P e la retta è, per definizione, la distanza tra P ed H, che vale $\sqrt{1+1}$.

5. Stabilire se esistano valori del parametro h per i quali i vettori

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\h\\3\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

siano linearmente dipendenti; per quei valori di h, esprimere uno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri due.

Per la soluzione di questo esercizio, si vedano gli appunti della lezione n. 15.