Facsimile di prova d'esame

Esempio di svolgimento

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche *x,y,z,* è assegnata la retta *r* di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x+z=1 \end{cases}.$$

a) Verificare che il punto $Q = (3,0,3)$ non appartiene ad *r* e trovare un'equazione che rappresenti il piano per *r* e per *Q*.
b) Stabilire se la retta *r'* di equazioni parametriche (nel parametro reale *t*)

$$x = 3t,\ y = -2t,\ z = -3t$$

sia o non sia complanare con la retta *r;* se è complanare, scrivere un'equazione del piano che le contiene, altrimenti rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta che passa per l'origine delle coordinate ed è perpendicolare ad entrambe.

a) Sostituendo le coordinate del punto Q nelle due equazioni, si trova che esse soddisfano la prima equazione ma non la seconda; perciò Q non appartiene alla retta r , ma appartiene al piano determinato dalla prima equazione. Il piano che contiene sia r che Q è quindi

$$x+3y-z=0.$$

b) Per cercare l'eventuale punto comune alle due rette, consideriamo il sistema di due equazioni nell'incognita t

$$\begin{cases} 3t+3(-2t)+3t=0 \\ 3t+(-3t)=1 \end{cases}.$$

La prima equazione è identicamente soddisfatta, la seconda è impossibile. Si conclude che le due rette sono parallele, e sono contenute nel piano $x+3y-z=0$.
A conferma del risultato, si può verificare che i parametri direttori di r' coincidono con le componenti del vettore $(1,3,-1)\wedge(1,0,1)$ *, che è parallelo ad r.*

2. A. Determinare per quali valori dei parametri *h,k* sia compatibile il sistema lineare, nelle incognite *x,y,z*

$$\begin{cases} x+3y+z=h \\ x+2y-z=1 \\ x-ky+z=3 \end{cases}.$$

B. Per quei valori di *h,k* per cui il sistema dell'esercizio A ha <u>infinite</u> soluzioni, determinare tutte le soluzioni.

C. Chiamiamo *F* la famiglia di piani definita da $x - ky + z = 3$, e *r*(*h*) la retta di equazioni $\begin{cases} x+3y+z=h \\ x+2y-z=1 \end{cases}$.

Utilizzare i risultati ottenuti in A e B e conoscenze di geometria analitica per rispondere alle domande:

a) E' vero o falso che le rette *r*(*h*), al variare di *h*, formano un fascio? Perché?
b) Esiste qualche piano di *F* che intersechi (in un unico punto) ogni retta *r*(*h*) ?
c) Esiste nella famiglia *F* qualche piano che sia parallelo (in senso stretto) a qualche retta *r*(*h*) ?
d) Esiste nella famiglia *F* qualche piano che contenga qualche *r*(*h*) ?

A) Riduciamo a scalini la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & h \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & h \\ 0 & 1 & 2 & h-1 \\ 0 & 3+k & 0 & h-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & h \\ 0 & 1 & 2 & h-1 \\ 0 & 0 & -2(3+k) & h-3-(3+k)(h-1) \end{array}\right).$$

Se è $k \neq -3$*, la matrice incompleta ha rango uguale a 3, quindi vi è una sola soluzione, qualunque sia h.*

Se è $k = -3$, la matrice incompleta ha rango uguale a 2; in questo caso il sistema è compatibile soltanto se è 2 anche il rango della matrice completa, quindi solo nel caso che sia $h = 3$. In sintesi:

per $k \neq -3$, h qualsiasi, il sistema ha una sola soluzione
per $k = -3$ e $h \neq 3$ il sistema è incompatibile
per $k = -3$ e $h = 3$, il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro.

B) Per $k = -3$ e $h = 3$, il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x + 3y = 3 - z \\ y = 2 - 2z \end{cases}$$

Ha le soluzioni $(-3+5t, 2-2t, t)$, al variare di t nel campo reale.

C) a) E’ vero. Le rette r(h) sono le intersezioni di un piano fisso (il piano $x + 2y - z = 1$) con i piani che variano in un fascio improprio, esattamente quello costituito dai piani ortogonali alla direzione $(1,3,1)$. Le rette r(h) sono dunque tutte complanari e parallele tra loro, perciò costituiscono un fascio improprio di rette.
b) Fissato k, purché $\neq -3$, il piano corrispondente interseca in un solo punto ogni retta r(h).
c) Per $k = -3$ si ha il piano di equazione $x + 3y + z = 3$, che appartiene al fascio dei piani paralleli che tagliano le rette r(h), quindi è parallelo ad ogni retta r(h), ed in senso stretto se è $h \neq 3$.
d) Il piano di equazione $x + 3y + z = 3$ contiene la retta r(3).

3. a) Per quali valori del parametro h la matrice $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & h & 2h-1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile?

b) Per i valori di h per cui $\mathbf{L}$ non è invertibile, stabilire quali tra i suoi vettori colonna sono linearmente indipendenti ed esprimere come combinazione lineare di questi uno dei rimanenti vettori.

a) Calcoliamo il determinante con lo sviluppo di Laplace secondo l’ultima colonna,

$$\det \mathbf{L} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & h & 2h-1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proseguiamo con lo sviluppo secondo la prima riga

$$\det \mathbf{L} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & h & 2h-1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -[-\det \begin{pmatrix} 1 & 2h-1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} 1 & h \\ 2 & 0 \end{pmatrix}] = -[-(-2-4h+2] + 2(-2h)] =$$

$$= -[4h - 4h] = 0.$$

La matrice $\mathbf{L}$ ***non*** *è invertibile, indipendentemente dal valore di h.*
b) E’ stato dimostrato, nelle lezioni di questo corso, che se una matrice è singolare, allora i vettori che sono le sue colonne sono linearmente dipendenti; perciò dal risultato a) ricaviamo che l’equazione

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 2h-1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t = \mathbf{0},$$

nelle incognite x,y,z,t , ha infinite soluzioni non banali, qualunque sia h.

Studiamo questo sistema, utilizzando il metodo di Gauss; iniziamo con scambiare la prima con la terza riga, e la seconda con la quarta divisa per 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & h & 2h-1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & h & 2h-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3-h & 6-2h & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che omettendo la terza colonna (quella in cui non ci sono pivot) si ottiene un sistema omogeneo, nelle incognite x,y,t, con una sola soluzione, quella banale; ne deduciamo che sono linearmente indipendenti la prima, la seconda e la quarta colonna[1].

Per esprimere la terza colonna come combinazione lineare delle altre, risolviamo il sistema in cui la matrice dei coefficienti è costituita dalla prima, seconda e quarta colonna della riduzione a scalini, e il vettore dei termini noti è la terza colonna:

$$\begin{cases} x+3y+t=5 \\ 3y+t=6 \\ t=0 \end{cases}$$

La soluzione è $(-1,2,0)$.

Verifichiamo che il risultato è esatto:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(-1)+\begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}2+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}0=\begin{pmatrix} 2 \\ -1+2h \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. Una delle equazioni che seguono rappresenta un’iperbole non degenere: quale? Indicare succintamente il ragionamento fatto per riconoscerla.

$$a)\ x^2-4y^2=0;\quad b)\ 2x^2+4y^2=9;\quad c)\ x-y^2=0;\quad d)\ (x-1)^2-4y^2=36.$$

Trovare il centro e gli asintoti dell’iperbole.

E’ l’equazione d). Infatti, l’equazione a) si può scrivere come $(x+2y)(x-2y)=0$, *perciò rappresenta una conica spezzata in due rette; l’equazione b) equivale a* $\frac{x^2}{9/2}+\frac{y^2}{9/4}=1$, *quindi rappresenta un’ellisse in forma canonica; la c) rappresenta la parabola con fuoco* $(1/4,0)$ *e vertice nell’origine.*

Con la sostituzione $x^*=x-1$, $y^*=y$ *si ottiene dalla d) l’equazione, in forma canonica, di un’iperbole:*

$$\left(\frac{x^*}{6}\right)^2-\left(\frac{y^*}{3}\right)^2=1.$$

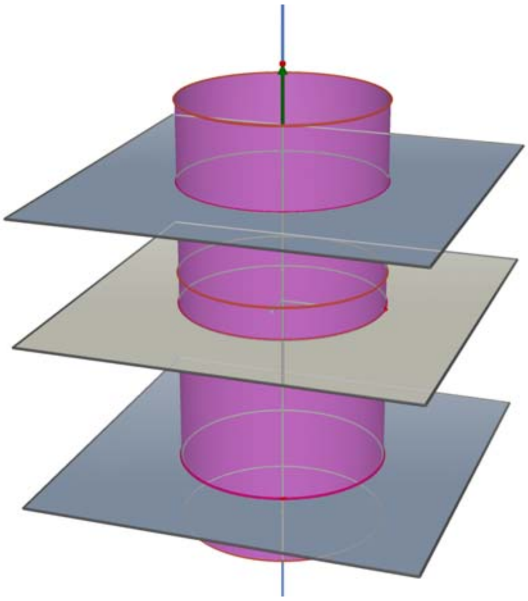
In queste sistema di coordinate, l’iperbole ha asintoti di equazioni $y^*=\pm\frac{x^*}{2}$, *e centro di coordinate* $x^*=0$, $y^*=0$; *nelle coordinate iniziali, il centro è il punto* $(1,0)$, *e gli asintoti sono le rette* $(x-1)=\pm 2y$.

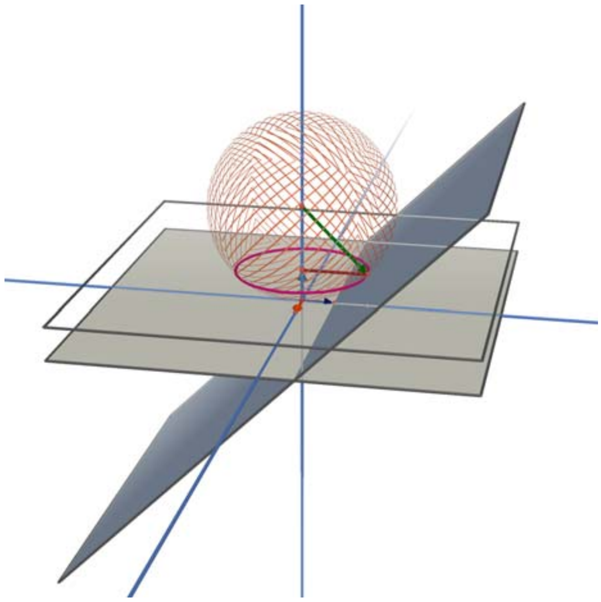
[1] Sono tra loro indipendenti anche la prima, la terza e la quarta colonna; la seconda colonna può essere espressa come combinazione lineare della prima, della terza e della quarta.

5. Sia C la circonferenza di centro (0,0,1) e raggio uguale a 2 che giace sul piano di equazione $z = 1$.
a) Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche del cilindro con generatrici parallele all'asse delle z che taglia sul piano $z = 1$ la circonferenza C.
b) Scrivere un'equazione della sfera che ha il centro sul piano $z = 3$ e che taglia sul piano $z = 1$ la circonferenza C. Qual è il piano tangente a questa sfera nel punto (0,2,1)?

a) Poiché il cilindro ha come direttrice una circonferenza, di un piano ortogonale alle generatrici, se si taglia il cilindro con i piani perpendicolari alle sue generatrici, si ottengono circonferenze che sono uguali (per traslazione) alla direttrice, cioè circonferenze con il centro sull'asse delle z e raggio uguale a 2. *Al variare di k, esse sono rappresentate dalle equazioni* $\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Perciò il cilindro ha equazioni parametriche, nei parametri reali ϑ, k, $\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 2\sin\vartheta \\ z = k \end{cases}$, *ed equazione cartesiana* $x^2 + y^2 = 4$.





b) Il centro della sfera si trova, oltre che sul piano z = 3, *sulla retta che passa per il centro della circonferenza C ed è perpendicolare al piano della circonferenza; quindi è il punto* (0,0,3). *Il raggio della sfera è la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui un cateto misura quanto il raggio di C, l'altro quanto la distanza del centro di C dal centro della sfera, quindi entrambi hanno lunghezza uguale a* 2. *La sfera ha equazione*

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8.$$

Il piano tangente è perpendicolare alla retta che unisce il punto di contatto, di coordinate (0,2,1), *con il centro della sfera,* (0,0,3). *Un vettore direttore della retta di questi due punti è* (0,2,–2). *Il piano per il punto* (0,2,1), *con direzione normale data da* (0,1,–1), *ha equazione*

$$(0,1,-1)\bullet(x, y-2, z-1) = y - z - 1 = 0.$$