Facsimile di prova d'esame

Esempio di svolgimento

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche x,y,z, è assegnata la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ x+z=1 \end{cases}.$$

a) Verificare che il punto $Q = (0,1,3)$ non appartiene ad r e trovare un'equazione che rappresenti il piano per r e per Q.

b) Stabilire se la retta r' di equazioni parametriche (nel parametro reale t)

$$x = 2 + t,\ \ y = 1-2t,\ \ z = -3t$$

sia o non sia complanare con la retta r; se è complanare, scrivere un'equazione del piano che le contiene, altrimenti rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta che passa per l'origine delle coordinate ed è perpendicolare ad entrambe.

a) Sostituendo le coordinate del punto Q nelle due equazioni, si trova che non le soddisfano, perciò Q non appartiene alla retta r. Il fascio dei piani che ha per sostegno questa retta ha equazione, dipendente dai parametri λ, μ,

$$\lambda(x+3y-z-1)+\mu(x+z-1)=0.$$

Affinché uno di questi piani contenga il punto Q deve essere

$$\lambda(0+3-3-1)+\mu(0+3-1)=-\lambda+2\mu=0.$$

Il piano cercato ha equazione

$$2(x+3y-z-1)+(x+z-1)=3x+6y-z-3=0.$$

b) L'eventuale punto comune alle due rette è il punto di r' individuato dal valore del parametro t che è radice del sistema di due equazioni

$$\begin{cases} 2+t+3(1-2t)+3t=1 \\ 2+t+(-3t)=1 \end{cases},\quad \text{cioè}\quad \begin{cases} -2t=-4 \\ -2t=-1 \end{cases}.$$

Il sistema è incompatibile, quindi le due rette non sono incidenti.

I parametri direttori di r' sono (1,–2,–3), quelli di r, che si ottengono dal prodotto vettoriale $(1,3,-1)\wedge(1,0,1)$, *sono (3,–2,–3). Non essendoci proporzionalità tra le due terne, r' non è parallela ad r. Possiamo concludere che le due rette sono sghembe.*

La direzione perpendicolare a entrambe è quella del prodotto vettoriale

$$(1,-2,-3)\wedge(3,-2,-3)=(0,-6,4)=2(0,-3,2)$$

La retta perpendicolare a r ed r' e passante per l'origine ha equazioni parametriche, nel parametro reale t

$$x=0,\ y=-3t,\ z=2t$$

ed equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x=0 \\ 2y+3z=0 \end{cases}.$$

2. A. Determinare per quali valori dei parametri h,k sia compatibile il sistema lineare, nelle incognite x,y,z

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-hz=1 \\ 2x-y+2z=k \end{cases}.$$

B. Per quei valori di h,k per cui il sistema dell'esercizio A ha <u>infinite</u> soluzioni, determinare tutte le soluzioni.

C. Chiamiamo $r(h)$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-hz=1 \end{cases}$, F la famiglia di piani definita da $2x - y + 2z = k$.

Utilizzare i risultati ottenuti in A e B e conoscenze di geometria analitica per rispondere alle domande:

a) E' vero o falso che i piani della famiglia F formano un fascio? Perché?
b) Esiste qualche retta $r(h)$ che intersechi (in un unico punto) ogni piano di F?
c) Esiste in F qualche piano che sia parallelo (in senso stretto) a qualche retta $r(h)$?
d) Esiste nella famiglia F qualche piano che contenga qualche $r(h)$?

A) Riduciamo a scalini la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -h & 1 \\ 2 & -1 & 2 & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1+h & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 4-k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1+h & 1 \\ 0 & 0 & 7(1+h) & 7-4+k \end{array}\right).$$

Se è $h \neq -1$, la matrice incompleta ha rango uguale a 3, quindi vi è una sola soluzione, qualunque sia k.
Se è $h = -1$, la matrice incompleta ha rango uguale a 2; in questo caso il sistema è compatibile soltanto se è 2 anche il rango della matrice completa, quindi solo nel caso che sia $k = -3$. In sintesi:

per $h \neq -1$, k qualsiasi, il sistema ha una sola soluzione
per $h = -1$ e $k \neq -3$, il sistema è incompatibile
per $h = -1$ e $k = -3$, il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro.

B) Per $k = -3$ e $h = -1$, il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x + 3y = 2 - z \\ y = 1 \end{cases}$$

Ha le soluzioni $(-1-t,1,t)$, al variare di t nel campo reale.

C) a) E' vero. I piani della famiglia F formano un fascio improprio, perché sono tutti perpendicolari alla direzione del vettore $(2,-1,2)$, quindi sono paralleli tra loro.
b) Per qualunque h, purché $\neq -1$, la retta r(h) corrispondente interseca in un solo punto ogni piano di F.
c) Tutti i piani di F, escluso il piano che si ottiene per $k = -3$, sono paralleli in senso stretto alla retta $r(-1)$.
d) Il piano di equazione $2x - y + 2z = -3$ contiene la retta $r(-1)$.

3. Stabilire quali tra i vettori $\mathbf{u}_1 = (2,3,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,3)$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,-2)$, $\mathbf{u}_4 = (2,2,2)$ siano linearmente indipendenti ed esprimere come combinazione lineare dei vettori indipendenti uno dei rimanenti.

Dalla teoria dei sistemi lineari, si ricava che il numero dei vettori indipendenti, tra i vettori colonna di una matrice, è il rango della matrice, e che sono indipendenti quei vettori colonna con cui si può costruire la matrice di un sistema omogeneo che ha soltanto la soluzione banale.
Una forma a scalini della matrice $(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\ \mathbf{u}_4)$ *è*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricaviamo che sono indipendenti due soli tra i vettori dati, una coppia formata da $\mathbf{u}_1$ *e da uno dei rimanenti, per esempio la coppia* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$.
Per risolvere il sistema, nelle incognite x, y

$$\mathbf{u}_1 x + \mathbf{u}_3 y = \mathbf{u}_2$$

utilizziamo la riduzione a scalini già fatta, prendendo la seconda colonna come colonna dei termini noti, e la prima e la terza come colonne dei coefficienti:

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ -2y = 3 \end{cases}.$$

La soluzione è $(1/2, -3/2)$. *Verifica:*

$$\mathbf{u_1}\frac{1}{2} + \mathbf{u_3}\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Una delle equazioni che seguono rappresenta una parabola non degenere: quale? Indicare succintamente il ragionamento fatto per riconoscerla.

$$a)\ x^2 - 4y^2 = 0; \quad b)\ 2x^2 + 4y^2 = 9; \quad c)\ 1 - x^2 = 0; \quad d)\ x^2 + 2xy + y^2 - 4y = 0.$$

Trovare asse e vertice della parabola.

E' l'equazione d). Infatti, l'equazione a) si può scrivere come $(x+2y)(x-2y) = 0$, *perciò rappresenta una conica spezzata in due rette; l'equazione b) equivale a* $\frac{x^2}{9/2} + \frac{y^2}{9/4} = 1$, *quindi rappresenta un'ellisse in forma canonica; la c) rappresenta la parabola degenere formata da due rette parallele, di equazioni rispettivamente* $x = 1$, $x = -1$.

Nel caso d), la matrice della conica è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, *con det*$\mathbf{A} = -4$ *e con* $\mathbf{A_{33}} = 0$. *Si tratta quindi di una conica non degenere, che è una parabola.*

Scrivendo l'equazione nella forma $(x+y)^2 - 4y = 0$ *si nota che le rette del fascio improprio* $x + y = k$ *incontrano la parabola in un solo punto, quindi sono parallele all'asse. Per determinare quale, tra le rette di questo fascio improprio, sia l'asse della parabola, cerchiamo nel fascio delle perpendicolari quella che è tangente alla parabola; il punto di contatto è il vertice. Il sistema*

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 4y = 0 \\ x = y + h \end{cases}$$

equivale al sistema $\begin{cases} (2y+h)^2 - 4y = 0 \\ x = y + h \end{cases}$, *cioè* $\begin{cases} 4y^2 + 4y(h-1) + h^2 = 0 \\ x = y + h \end{cases}$, *che ha due radici coincidenti se è* $4(h-1)^2 - 4h^2 = 4(-2h+1) = 0$.

Per $h = ½$ *il sistema che fornisce le intersezioni diventa* $\begin{cases} 4y^2 - 2y + \frac{1}{4} = (2y - \frac{1}{2})^2 = 0 \\ x = y + \frac{1}{2} \end{cases}$.

Abbiamo trovato che la retta di equazione $x = y + \frac{1}{2}$ *è tangente alla parabola nel punto* $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, *vertice della parabola; l'asse è la retta perpendicolare alla tangente in questo punto, quindi ha equazione* $x + y = 1$.

5. Sia S la superficie sferica di centro (0,0,1) e raggio uguale a 2.

a) Qual è il piano tangente a S nel punto (0,0,3)?

b) Rappresentare in forma cartesiana la circonferenza C che è l'intersezione di S con il piano di equazione $x = 1$.

c) Trovare il centro, il raggio e delle equazioni parametriche di C.

d) Scrivere delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del cono con vertice (–1,0,1) che taglia sul piano $x = 1$ la circonferenza C.

a) Il piano tangente è perpendicolare alla retta che unisce il punto di contatto, di coordinate (0,0,3), *con il centro della sfera,* (0,0,1). *Un vettore direttore della retta di questi due punti è il versore dell'asse delle z Il piano per il punto* (0,0,3), *perpendicolare all'asse delle z, ha equazione*

$$z = 3.$$

b) La superficie sferica S ha equazione

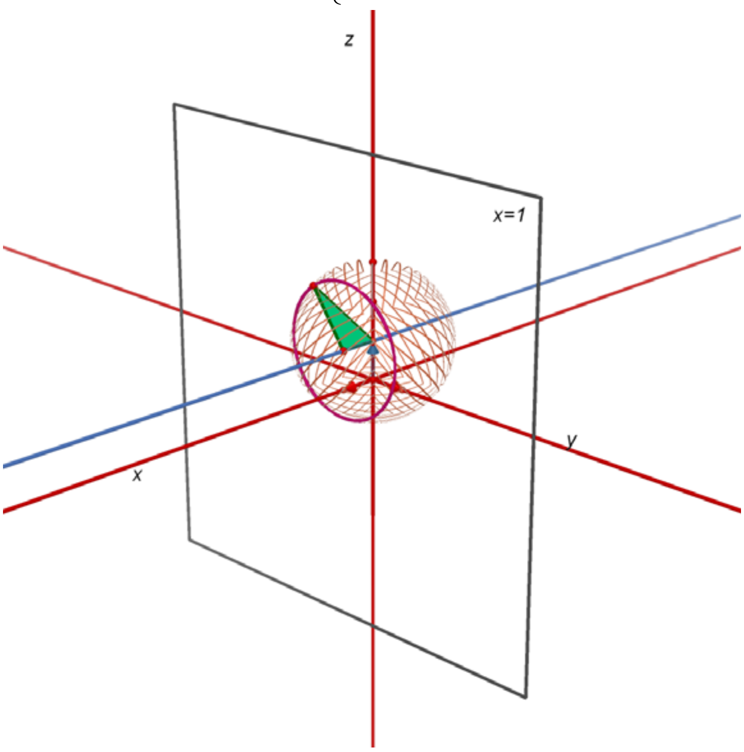
$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4,$$

quindi la sua intersezione C con il piano dato ha equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 \\ x = 1. \end{cases}$$

c) Il centro di C è il punto comune al piano su cui giace C e alla retta perpendicolare a questo piano che passa per il centro di S, che è la retta per (0,0,1) *parallela all'asse delle x, di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$



Il centro di C è dunque il punto (1,0,1).

Il raggio r di C misura quanto un cateto di un triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa lunga quanto il raggio di S e l'altro cateto pari alla distanza del centro di S dal piano di C. Si ha quindi

$$r^2 = 4 - 1 = 3$$

Le equazioni parametriche di C, nel parametro reale ϑ, sono

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3}\cos\vartheta \\ z = 1 + \sqrt{3}\sin\vartheta \end{cases} .$$

d) Scelto un punto sulla circonferenza C, la retta che lo congiunge con $(-1,0,1)$ *ha equazioni parametriche, nel parametro t,*

$$\begin{cases} x = -1 + t(-1-1) = -1 - 2t \\ y = 0 - t\sqrt{3}\cos\vartheta \\ z = 1 + t(1 - 1 - \sqrt{3}\sin\vartheta) = 1 - t\sqrt{3}\sin\vartheta \end{cases} .$$

Al variare dei parametri reali t, ϑ, le equazioni precedenti sono proprio le equazioni parametriche del cono.
Da esse si ricava

$$t = \frac{-1-x}{2}$$
$$\cos\vartheta = \frac{y}{t\sqrt{3}} = -\frac{2y}{(x+1)\sqrt{3}} .$$
$$\sin\vartheta = \frac{1-z}{t\sqrt{3}} = \frac{2(z-1)}{(x+1)\sqrt{3}}$$

Usando la relazione fondamentale tra seno e coseno si arriva all'equazione cartesiana del cono:

$$4y^2 + 4(z-1)^2 = 3(x+1)^2 .$$

La figura mostra una parte del cono, quella compresa tra il piano della circonferenza ed il suo simmetrico rispetto al vertice del cono.