20 marzo 2009

Un esercizio riassuntivo su piani e rette.

Verificare che le rette *r*, di equazioni $\begin{cases} x-3y-z=2 \\ -x+2y-4z=1 \end{cases}$, ed *s*, di equazioni parametriche $\begin{cases} x=3+t \\ y=2-2t \\ z=5+t \end{cases}$, nel parametro *t*, sono **sghembe** e scrivere **un'equazione del piano che contiene *r* ed è parallelo ad** *s*.
Trovare la **distanza** tra *r* ed *s*.

Per verificare che le due rette sono sghembe **potremmo** ricavare la forma cartesiana di *s*, calcolare un determinante del quarto ordine e controllare che è diverso da zero. **In alternativa**, cerchiamo se esiste un punto comune alle due rette*:*

$$\begin{cases} 3+t-3(2-2t)-(5+t)=2 \\ -(3+t)+2(2-2t)-4(5+t)=1 \end{cases}, \begin{cases} 6t=10 \\ -9t=20 \end{cases}$$

Il sistema è incompatibile, quindi le rette non si incontrano.
Un vettore direttore di *r* è: $(1,-3,-1)\wedge(-1,2,-4)=(14,5,-1)$ che non è multiplo del vettore direttore di *s*. Le rette non sono parallele. ***Quindi***: le due rette sono sghembe.

I modo per determinare il piano che contiene *r* ed è parallelo ad *s:* il piano appartiene al fascio dei piani per *r*

$$\lambda(x-3y-z-2)+\mu(-x+2y-4z-1)=0 .$$

Il vettore normale al piano generico del fascio è $(\lambda-\mu,-3\lambda+2\mu,-\lambda-4\mu)$; perché il piano sia parallelo ad *s* il suo vettore normale deve essere perpendicolare al vettore direttore di *s*

$$(\lambda-\mu,-3\lambda+2\mu,-\lambda-4\mu)\bullet(1,-2,1) = \lambda-\mu+6\lambda-4\mu-\lambda-4\mu=6\lambda-9\mu= 0.$$

Il piano cercato si trova (ad esempio) per $\lambda= 3$, $\mu = 2$:

$$3(x-3y-z-2)+2(-x+2y-4z-1)=x-5y-11z-8=0 .$$

II modo: imponiamo ad ogni vettore, determinato da un punto generico *P* e da un punto P_0 fissato su *r*, traslato nell'origine, di appartenere al sottospazio generato dai vettori direttori di *r* e di *s*. Occorre conoscere un punto di *r:* ad esempio, il punto in cui *r* interseca il piano *y* = 0, che si trova risolvendo il sistema

$\begin{cases} x-z=2 \\ -x-4z=1 \\ y=0 \end{cases}$, che equivale a $\begin{cases} x-z=2 \\ -5z=3 \\ y=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x=7/5 \\ y=0 \\ z=-3/5 \end{cases}$.

L'equazione del piano è

$$0=\det\begin{pmatrix} x-\frac{7}{5} & y & z+\frac{3}{5} \\ 14 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{r}\wedge\mathbf{s}\bullet(P-P_0)=(x-\frac{7}{5})(3)-y(15)+(z+\frac{3}{5})(-33) .$$

Dividendo per 3 si ottiene: $x - 5y - 11z + (-7-33)/5 = 0$, come con l'altro metodo.

La distanza tra le due rette è la distanza di un punto di *s* - ad esempio, (4,0,6) - dal piano trovato, che è uguale alla distanza tra il punto scelto e la sua proiezione ortogonale sul piano. La proiezione ortogonale di (4,0,6) è il punto comune alla retta, per il punto stesso, ortogonale al piano ed il piano:

$\begin{cases} x-5y-11z-8=0 \\ x=4+t \\ y=-5t \\ z=6-11t \end{cases}$ da cui $(4+t)-5(-5t)-11(6-11t)-8=t(1+25+121)+4-66-8=0.$

Per comodità, scriviamo $\tau=\dfrac{-70}{1+25+121}$. La distanza tra (4,0,6) e $(4+\tau,-5\tau, 6-11\tau)$ risulta essere

$$\sqrt{\tau^2+25\tau^2+121\tau^2}=|\tau|\sqrt{1+25+121}=\left|\frac{-70}{\sqrt{1+25+121}}\right| .$$

Allo stesso risultato si arriva sostituendo le coordinate del punto scelto nel polinomio normalizzato $\dfrac{x-5y-11z-8}{\sqrt{1+25+121}}$ che, uguagliato a zero, fornisce l'equazione del piano, e prendendo il valore assoluto del risultato: si trova $\left|\dfrac{4-66-8}{\sqrt{1+25+121}}\right|$.