

Facsimile di prova d'esame

Per favore, leggere le avvertenze! Scrivere nome e cognome in testa ad ogni foglio. Consegnare questo foglio. La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali; non è consentito ritirarsi o uscire prima che sia trascorsa un'ora e mezza dall'inizio della prova.

Nome e cognome _____ n. matricola _____ corso di laurea _____

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche x, y, z , è assegnata la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+3y-z=0, \\ x+z=1 \end{cases}$$

a) Verificare che il punto $Q = (3,0,3)$ non appartiene ad r e trovare un'equazione che rappresenti il piano per r e per Q .

b) Stabilire se la retta r' di equazioni parametriche (nel parametro reale t)

$$x = 3t, \quad y = -2t, \quad z = -3t$$

sia o non sia complanare con la retta r ; se è complanare, scrivere un'equazione del piano che le contiene, altrimenti rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta che passa per l'origine delle coordinate ed è perpendicolare ad entrambe.

2. A. Determinare per quali valori dei parametri h, k sia compatibile il sistema lineare, nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x+3y+z=h \\ x+2y-z=1 \\ x-ky+z=3 \end{cases}$$

B. Per quei valori di h, k per cui il sistema dell'esercizio A ha infinita soluzioni, determinare tutte le soluzioni.

C. Chiamiamo F la famiglia di piani definita da $x - ky + z = 3$, e $r(h)$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+3y+z=h \\ x+2y-z=1 \end{cases}$.

Utilizzare i risultati ottenuti in A e B e conoscenze di geometria analitica per rispondere alle domande:

- E' vero o falso che le rette $r(h)$, al variare di h , formano un fascio? Perché?
- Esiste qualche piano di F che intersechi (in un unico punto) ogni retta $r(h)$?
- Esiste nella famiglia F qualche piano che sia parallelo (in senso stretto) a qualche retta $r(h)$?
- Esiste nella famiglia F qualche piano che contenga qualche $r(h)$?

3. a) Per quali valori del parametro h la matrice $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & h & 2h-1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile?

b) Per i valori di h per cui \mathbf{L} non è invertibile, stabilire quali tra i suoi vettori colonna sono linearmente indipendenti ed esprimere come combinazione lineare di questi uno dei rimanenti vettori.

4. Una delle equazioni che seguono rappresenta un'iperbole non degenera: quale? Indicare succintamente il ragionamento fatto per riconoscerla.

$$a) x^2 - 4y^2 = 0; \quad b) 2x^2 + 4y^2 = 9; \quad c) x - y^2 = 0; \quad d) (x-1)^2 - 4y^2 = 36.$$

Trovare il centro e gli asintoti dell'iperbole.

5. Sia C la circonferenza di centro $(0,0,1)$ e raggio uguale a 2 che giace sul piano di equazione $z = 1$.

a) Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche del cilindro con generatrici parallele all'asse delle z che taglia sul piano $z = 1$ la circonferenza C .

b) Scrivere un'equazione della sfera che ha il centro sul piano $z = 3$ e che taglia sul piano $z = 1$ la circonferenza C . Qual è il piano tangente a questa sfera nel punto $(0,2,1)$?