

Facsimile di prova d'esame

Per favore, leggere le avvertenze! Scrivere nome e cognome in testa ad ogni foglio. Consegnare questo foglio. La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali; non è consentito ritirarsi o uscire prima che sia trascorsa un'ora e mezza dall'inizio della prova.

Nome e cognome

n. matricola

corso di laurea

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche x,y,z , è assegnata la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+3y-z=1, \\ x+z=1 \end{cases}$$

a) Verificare che il punto $Q = (0,1,3)$ non appartiene ad r e trovare un'equazione che rappresenti il piano per r e per Q .

b) Stabilire se la retta r' di equazioni parametriche (nel parametro reale t)

$$x = 2 + t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = -3t$$

sia o non sia complanare con la retta r ; se è complanare, scrivere un'equazione del piano che le contiene, altrimenti rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta che passa per l'origine delle coordinate ed è perpendicolare ad entrambe.

2. A. Determinare per quali valori dei parametri h,k sia compatibile il sistema lineare, nelle incognite x,y,z

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-hz=1 \\ 2x-y+2z=k \end{cases}$$

B. Per quei valori di h,k per cui il sistema dell'esercizio A ha infinito soluzioni, determinare tutte le soluzioni.

C. Chiamiamo $r(h)$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-hz=1 \end{cases}$, F la famiglia di piani definita da $2x - y + 2z = k$.

Utilizzare i risultati ottenuti in A e B e conoscenze di geometria analitica per rispondere alle domande:

- E' vero o falso che i piani della famiglia F formano un fascio? Perché?
- Esiste qualche retta $r(h)$ che intersechi (in un unico punto) ogni piano di F ?
- Esiste in F qualche piano che sia parallelo (in senso stretto) a qualche retta $r(h)$?
- Esiste nella famiglia F qualche piano che contenga qualche $r(h)$?

3. Stabilire quali tra i vettori $\mathbf{u}_1 = (2,3,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,3)$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,-2)$, $\mathbf{u}_4 = (2,2,2)$ siano linearmente indipendenti ed esprimere come combinazione lineare dei vettori indipendenti uno dei rimanenti.

4. Una delle equazioni che seguono rappresenta una parabola non degenera: quale? Indicare succintamente il ragionamento fatto per riconoscerla.

$$a) x^2 - 4y^2 = 0; \quad b) 2x^2 + 4y^2 = 9; \quad c) 1 - x^2 = 0; \quad d) x^2 + 2xy + y^2 - 4y = 0.$$

Trovare asse e vertice della parabola.

5. Sia S la superficie sferica di centro $(0,0,1)$ e raggio uguale a 2.

- Qual è il piano tangente a S nel punto $(0,0,3)$?
- Rappresentare in forma cartesiana la circonferenza C che è l'intersezione di S con il piano di equazione $x = 1$.
- Trovare il centro, il raggio e delle equazioni parametriche di C .
- Scrivere delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del cono con vertice $(-1,0,1)$ che taglia sul piano $x = 1$ la circonferenza C .