

## Come si stabilisce se un sistema lineare è compatibile?

La risposta a questa domanda è la proposizione 3.6, pag. 120 del [testo] (S. Abeasis, *Geometria analitica del piano e dello spazio*, Zanichelli, 2002). La stessa risposta può essere espressa utilizzando la definizione di rango di una matrice (3.9 in [testo]), in questa forma<sup>1</sup>:

**Teorema di Rouché-Capelli.** *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  sia compatibile è che il rango della matrice  $\mathbf{A}$  dei coefficienti (“matrice incompleta”) sia uguale a quello della matrice “completa”  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ .*

**La dimostrazione** è uguale alla dimostrazione della prop. 3.6 e del corollario 3.7 di [testo]. Per comodità, ricordiamo i passi del ragionamento:

1. il sistema dato  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  è equivalente a (cioè, ha le stesse soluzioni di) un sistema a scala  $\mathbf{SX} = \mathbf{C}$ , che si ottiene con il procedimento di eliminazione di Gauss. Infatti, ogni passo del procedimento di Gauss è o un cambiamento dell’ordine delle equazioni, o è la moltiplicazione di un’equazione per uno scalare diverso da zero, o è la sostituzione di un’equazione con la combinazione lineare, con coefficienti diversi da zero, di quella equazione e di un’altra; ciascuna di queste operazioni<sup>2</sup> non cambia l’insieme delle soluzioni del sistema.
2. Notiamo che per un sistema lineare omogeneo non ha senso considerare la matrice completa, dato che la colonna dei termini noti non viene influenzata dal procedimento di eliminazione. Se, dopo la riduzione a scala, la matrice dei coefficienti ha esattamente  $n$  pivots, il sistema omogeneo ammette soltanto la soluzione banale<sup>3</sup>; se i pivots sono  $r$ , con  $r < n$ , allora si ricavano le  $r$  incognite, che hanno come coefficienti i pivots, in funzione delle  $n-r$  residue. Quindi, se è  $r < n$ , il sistema omogeneo ha infinite soluzioni non banali, dipendenti da  $n - r$  parametri liberi.
3. Se operando in modi diversi si ottenessero due differenti riduzioni a scala di una matrice  $\mathbf{A}$ , una con  $r$  pivots e l’altra con  $r'$  pivots, allora dalla prima riduzione si ricaverebbe che le soluzioni del sistema omogeneo  $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$  dipendono da  $n-r$  parametri liberi mentre dalla seconda riduzione si avrebbe che le stesse soluzioni dipendono da  $n-r'$  parametri: deve essere  $r = r'$ . E’ perciò lecito chiamare *rango* di una matrice il numero di pivots di una qualsiasi riduzione a scala di quella matrice.
4. Indichiamo con  $r$  il rango della matrice  $\mathbf{A}$ . Riducendo a scala il sistema, si ottiene un sistema, equivalente a quello dato, nel quale le ultime  $m-r$  equazioni hanno il primo membro identicamente nullo. Il sistema ammette soluzione se e soltanto se ciascuna delle ultime  $m-r$  equazioni ha anche il secondo membro uguale a 0, cioè si riduce a  $\mathbf{0x} = 0$ . Questo accade se e solo se la matrice completa  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$  ha anch’essa rango  $r$ : infatti, se la matrice completa ha rango  $r+1$  (e solo in questo caso), il sistema a scalini contiene un’equazione *incompatibile*  $\mathbf{0x} = c_{r+1}$ , nella quale tutti i coefficienti delle incognite sono uguali a zero, mentre il termine noto è diverso da zero.

C.V.D.

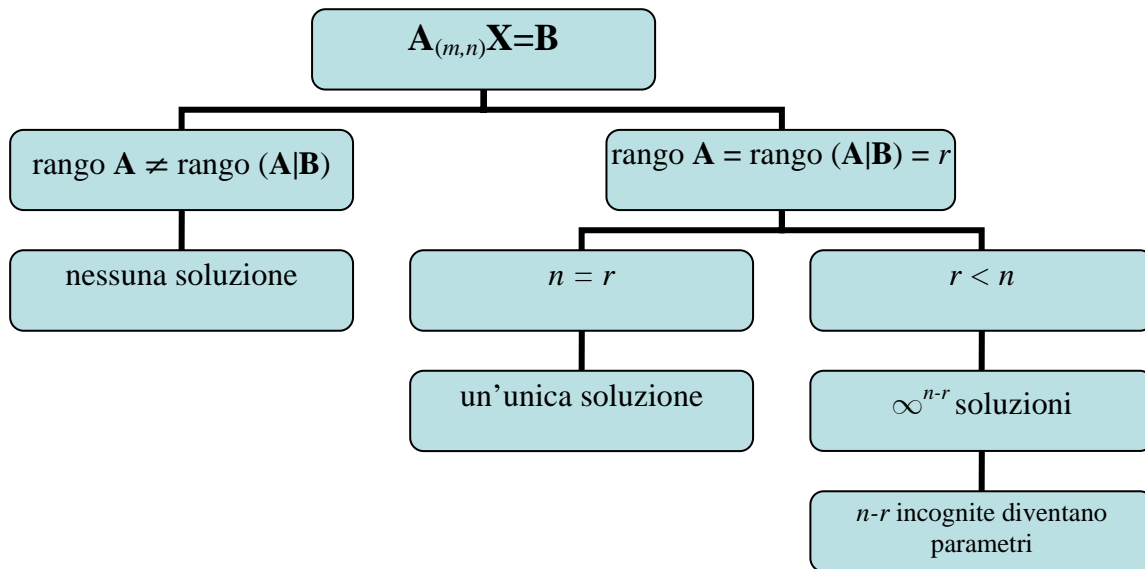
<sup>1</sup> P. Maroscia, *Introduzione alla geometria e all’algebra lineare*, Zanichelli, 2000, teor. 3.3, pag. 125

<sup>2</sup> Lemma 3.2 in [testo]

<sup>3</sup> Dall’ultima equazione si ottiene  $x_n = 0$ , dalla penultima  $x_{n-1} = 0$ , e così via.

Nell'usare il teorema di Rouché-Capelli per discutere un sistema lineare, può essere utile riferirsi a questo schema, tratto da M. Bordoni, *Geometria, I modulo: Algebra lineare*, Progetto Leonardo, soc. ed. Esculapio, Bologna, 2001.

### Schema del procedimento risolutivo di un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite



**Esempio.** Uno degli esercizi proposti durante la quarta settimana del corso richiede: *determinare i valori dei*

*parametri  $\lambda, \mu$  per cui il sistema* 
$$\begin{cases} x+2y = \mu \\ x+4y = 1 \\ x+(\lambda+2)y = 1 \end{cases}$$
 *è compatibile e trovare tutte le soluzioni.*

In questo caso è  $n = 2, m = 3$ ,  $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mu \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & \lambda+2 & 1 \end{pmatrix}$ . Riducendo a scalini si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mu \\ 0 & 2 & 1-\mu \\ 0 & \lambda & 1-\mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mu \\ 0 & 2 & 1-\mu \\ 0 & 0 & (1-\mu)(2-\lambda) \end{pmatrix}$$

Il rango di  $\mathbf{A}$  è uguale a 2, per ogni  $\lambda$ . Il rango della matrice completa  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$  è 2 nei casi

- 1)  $\lambda = 2, \mu$  qualsiasi,
- 2)  $\mu = 1, \lambda$  qualsiasi.

In tali casi, il sistema è compatibile ed ha una sola soluzione. Nel caso 1), fissato  $\mu$ , la soluzione è  $(2\mu - 1, (1-\mu)/2)$ ; nel caso 2) la soluzione è  $(1,0)$ .

L'interpretazione geometrica del sistema chiarisce la differenza tra i due casi. Si noti che la prima equazione rappresenta un fascio improprio di rette, quello delle parallele alla retta  $x + 2y = 0$ , e che la terza equazione rappresenta un fascio proprio (privato di una retta), perché può scriversi come  $x + 2y - 1 + \lambda y = 0$ ; si tratta quindi del fascio che ha come centro il punto  $(1,0)$  (la retta  $y = 0$ , però, non si può ottenere da questa rappresentazione del fascio per nessun valore di  $\lambda$ ). A questo fascio proprio, per  $\lambda = 2$ , appartiene la retta  $r$  data dalla seconda equazione. Quindi:

1. se è  $\lambda = 2$ , allora la terza equazione coincide con la seconda, ed il sistema rappresenta la ricerca della intersezione tra la retta  $r$  con una retta variabile nel fascio improprio; ogni retta di questo fascio incontra  $r$  in un punto;
2. c'è una sola retta del fascio improprio che passa per il centro  $(1,0)$  del fascio proprio, quella corrispondente al valore  $\mu = 1$ : in tal caso le tre rette, qualunque sia la terza, si incontrano in  $(1,0)$ .