

# “Geometria analitica e algebra lineare”

## anno accademico 2011/12

### Programma del corso.

1. Relazioni di equivalenza. Classi di equivalenza, insieme quoziente. Vettori geometrici applicati in un punto dello spazio, operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Vettori liberi. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Equazioni vettoriali e parametriche di rette e di piani.

2. Sistemi lineari: il problema della compatibilità. Matrice dei coefficienti, matrice completa. Sistemi quadrati, matrici triangolari alte. Il metodo di eliminazione di Gauss. Matrici non singolari. Sistemi quadrati con matrice non singolare.

3. Le operazioni di somma e prodotto per un numero reale in  $\mathbb{R}^n$ . Gruppi, campi. Definizione di spazio vettoriale su un campo  $K$ , esempi. Sottospazi vettoriali. Combinazioni lineari. Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema lineare sia compatibile. Vettori linearmente dipendenti. Condizione di allineamento di tre punti. Basi. Sistemi massimali di vettori linearmente indipendenti. Teorema del completamento. Definizione di dimensione. Intersezione di sottospazi; sottospazio somma. Teorema di Grassmann. Somma diretta e sottospazi supplementari.

4. L'applicazione  $L_A$  associata ad una matrice  $A$ . Definizione di applicazione lineare. Nucleo e Immagine di un'applicazione lineare. Rango o dimensione dell'immagine; teorema delle dimensioni e sue conseguenze. Il teorema di Rouché-Capelli. Ricerca delle soluzioni di un sistema lineare tramite la riduzione di Gauss. Matrici a scalini, pivot. Relazione tra il rango di una matrice ed il numero dei pivot di una sua qualsiasi riduzione a scala. Sottospazi affini, giacitura, relazione di parallelismo tra sottospazi affini, equazioni parametriche e equazioni cartesiane. Il caso dello spazio tridimensionale: equazioni di rette, di piani.

5. Rette nel piano; equazione cartesiana del fascio delle rette per un punto. Fasci di rette, propri ed impropri. Nello spazio: stelle di rette, stelle di piani, fascio di piani. Condizioni perché due rette, nella forma cartesiana, siano sghembe, siano parallele.

6. Spazi vettoriali di applicazioni lineari. Applicazioni lineari invertibili. Spazi vettoriali isomorfi. Composizione di applicazioni e prodotto di matrici. Il prodotto righe per colonne e le sue proprietà. Matrici invertibili, loro caratterizzazione. Matrice di un cambiamento di base. Matrici simili. Il determinante di una matrice di ordine 2, interpretazione come area di un parallelogrammo. Proprietà che definiscono il determinante. Definizione ricorsiva di determinante. Dimostrazione di alcune conseguenze delle proprietà che definiscono il determinante. Senza dimostrazione: esistenza e unicità del determinante, teoremi di Laplace, di Binet. Uso dei determinanti in geometria analitica: equazione di una retta per due punti nel piano, equazione del piano per tre punti nello spazio, condizioni di allineamento e di complanarità, condizione perché due rette siano sghembe.

7. Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche: distanza di due punti, coseno dell'angolo di due vettori, prodotto scalare. Prodotto scalare canonico in  $\mathbb{R}^n$ , sue proprietà. Definizione di spazio vettoriale euclideo o metrico. Vettori ortogonali. Basi ortogonali, basi ortonormali. Basi concordemente orientate. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, definizione di coseno dell'angolo di due vettori. Proiezione ortogonale di un vettore su un altro, in  $\mathbb{R}^3$ . Distanze, isometrie di spazi vettoriali metrici, isometrie di  $\mathbb{R}^n$ , matrici ortogonali; il caso del piano. Sistemi di riferimento in  $\mathbb{R}^3$ , sistemi affini e orientazione, cambiamenti di coordinate, cambiamenti di coordinate ortogonali monometriche. Uso del prodotto scalare per calcolare l'angolo di due rette orientate, condizione di perpendicolarità tra rette. Equazione del piano per un punto perpendicolare ad una data retta, proiezione ortogonale di un punto su una retta, su un piano, distanza di un punto da una retta, da un piano; piani orientati, angolo di piani orientati, angolo tra retta e piano orientati. Uso del prodotto scalare per calcolare la distanza di un punto da un piano; problemi su distanze e angoli nel piano euclideo, da trattare in analogia al caso tridimensionale. Prodotto vettoriale, prodotto misto, volume del parallelepipedo.

8. Autovettori e autovalori. Autospazi. Basi di autovettori, endomorfismi diagonalizzabili. Polinomio caratteristico. Autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore; criterio di diagonalizzabilità. Il caso delle matrici simmetriche reali.

9. Insiemi di punti del piano definiti attraverso relazioni tra distanze: circonferenza, ellisse, iperbole, parabola. Equazioni canoniche cartesiane ed parametriche di queste curve. Il problema della classificazione delle curve di secondo ordine. Classificazione metrica delle coniche, uso di invarianti e del teorema spettrale nella dimostrazione del teorema di classificazione. Centro, assi, rette asintotiche, asintoti, rette secanti, tangenti, esterne. Quadriche: sfere, coni, cilindri, classificazione, sezioni piane di quadriche.

### Testi.

Il testo di riferimento principale è

Marco Abate – Chiara de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, McGraw-Hill, Milano, seconda edizione 2010.

Gli argomenti trattati nel corso si trovano in qualunque manuale universitario di geometria analitica e algebra lineare, ad esempio:

Marco Abate, *Geometria*, McGraw-Hill, Milano, 1996.

Silvana Abeasis, *Geometria analitica del piano e dello spazio*, Zanichelli, Bologna, 2002.

Paolo Maroscia, *Introduzione alla geometria e all'algebra lineare*, Zanichelli, Bologna, 2000

Manlio Bordoni, *Geometria: I modulo, Algebra lineare, II modulo, Geometria analitica*, Progetto Leonardo, Bologna, 2003

Enrico Schlesinger, *Algebra lineare e geometria*, Zanichelli, Bologna, 2011

## Organizzazione didattica.

Come non si diventa musicisti ascoltando la radio, così non si diventa matematici senza fare matematica, in prima persona. Pertanto

- ✓ questo corso prevede, come attività in aula, oltre alle lezioni “cattedratiche”, la discussione di esercizi e di problemi;
- ✓ come sussidio per tali attività di studio viene utilizzato il supporto della piattaforma <http://elea.linguistica.unical.it/moodle/> . Ogni studente **deve iscriversi al corso** andando alla pagina web sopra indicata, e utilizzando la password che viene fornita nel primo giorno di lezione.
- ✓ La maggior parte degli esercizi e dei problemi sono pubblicati, nella pagina del corso in <http://elea.linguistica.unical.it/moodle/> , in modo che gli studenti abbiano modo di affrontarli lavorando per proprio conto o in gruppi spontanei, prima che vengano discussi in aula.
- ✓ Nella piattaforma lo studente troverà, per ogni argomento affrontato nel corso
  - eventuali documenti integrativi, riferimenti bibliografici e links
  - **avvisi** (alla voce **FORUM NEWS**)
  - brevi **QUIZ**, per autoverifica dell'apprendimento
  - i **COMPITI A CASA, da svolgere on line, preferibilmente in gruppo**
  - le soluzioni corrette dei compiti a casa, scelte tra quelle inviate dagli studenti
  - il **FORUM** in cui ciascuno può porre domande, intervenire su questioni legate al corso, eccetera
  - brevi sondaggi, sulla valutazione delle attività da parte degli studenti
- ✓ Circa **a metà corso**, verrà svolta in aula una prova scritta, riguardante gli argomenti trattati fino a quel momento; il compito verrà ritirato, corretto e discusso. Questa prova “intermedia” è uno strumento di autovalutazione - per gli studenti e per il docente - e di allenamento per l'esame finale.
- ✓ Un giudizio di piena sufficienza (maggiore o uguale a 25/30) nella prova intermedia produce un aumento di due punti nel voto finale dell'esame; per un voto superiore a 17 e inferiore a 25 si guadagna un punto.
- ✓ M. D'Aprile riceve nel suo studio nell'edificio 31B, sesto piano (livello ponte carrabile) nell'orario pubblicato nella pagina del corso oppure per appuntamento: tel. 0984/496452, posta elettronica [m.daprile@unical.it](mailto:m.daprile@unical.it) ; pagina web nel sito del Dipartimento di Matematica <https://www.mat.unical.it/~daprile/> .

## Esame.

L'esame consiste di due prove, una scritta e una orale, sugli argomenti effettivamente svolti nelle lezioni.

La prova scritta dura tre ore. Durante la prova scritta, è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. Non è consentito ritirarsi o uscire prima che sia trascorsa una ora e mezza dell'inizio della prova.

Gli esercizi dell'esame devono essere svolti in modo completo, accompagnati da motivazioni e spiegazioni, anche succinte, purché leggibili. Non viene dato nessun valore a un risultato, anche corretto, che non sia giustificato.

Si è ammessi alla prova orale se il voto della prova scritta è non inferiore ad un certo minimo (ordinariamente 14). E' **obbligatoria l'iscrizione all'esame** per via elettronica, nel sito all'indirizzo <https://didattica.unical.it/> .

## Frequenza.

Per ottenere l'attestazione di frequenza a questo corso sono necessari

1. una firma di presa visione di questo documento, su fogli disponibili durante la prima settimana di lezione
2. l'iscrizione al corso in <http://elea.linguistica.unical.it/moodle/> .

M. D'Aprile

26 settembre 2011