# "Geometria analitica e algebra lineare"
# Programma svolto nell'anno accademico 2011-12

**1. Vettori geometrici.**
Prerequisiti: insiemi, funzioni, relazioni di equivalenza. Definizioni di gruppo, anello, campo.
Vettori applicati; somma, prodotto per uno scalare. Coordinate di un vettore del piano rispetto a due vettori fissati non proporzionali; coordinate nello spazio.
Applicazioni del piano in sé definite attraverso operazioni su vettori: traslazioni, omotetie.
Corrispondenza bigettiva tra lo spazio dei vettori applicati in un punto del piano e $\mathbb{R}^2$. Analoga corrispondenza nel caso dei vettori applicati in un punto dello spazio. Equazioni vettoriali e parametriche di rette, vettori direttori; equazioni parametriche di piani. Ricerca dell'intersezione di due rette, rette sghembe.

**2. Sistemi lineari.**
Soluzioni di un'equazione algebrica. Equazioni di primo grado; sistemi lineari di $m$ equazioni in $n$ incognite, matrice dei coefficienti. Matrici triangolari, sistemi triangolari.
Sistemi lineari equivalenti. Sistemi lineari omogenei. Metodo di Gauss. Sistemi quadrati. Matrici singolari.

**3. Spazi vettoriali.**
Definizione di spazio vettoriale. Esempi: $\mathbb{R}^n$, le funzioni reali di variabile reale, le funzioni polinomiali, le matrici di dato tipo. Prime conseguenze degli assiomi: per ogni $\mathbf{v}$, $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$; $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ .
Definizione di sottospazio vettoriale. Esempi e controesempi.
Combinazioni lineari di vettori, Span($\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$). Un sistema lineare $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ è compatibile se e solo se $\mathbf{B}$ appartiene allo spazio generato dalle colonne di $\mathbf{A}$. Dipendenza lineare. In una famiglia di vettori linearmente dipendenti almeno uno è combinazione lineare degli altri.
Sistemi lineari omogenei: soluzioni non banali e dipendenza lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.
Famiglie di generatori di un sottospazio vettoriale; basi, unicità delle coordinate di un vettore rispetto ad una data base. Famiglie massimali di vettori linearmente indipendenti. Il teorema del completamento. Tutte le basi di uno spazio vettoriale sono formate dallo stesso numero di vettori; dimensione. Se la dimensione di V è $n$, ogni famiglia di $m$ vettori in V, con $m > n$, è di vettori linearmente dipendenti. Dimensioni dei sottospazi, somma e intersezione di sottospazi, teorema di Grassmann, somma diretta.

**4. Applicazioni lineari e sistemi lineari.**
Struttura delle soluzioni di un sistema lineare. Applicazione lineare associata ad una matrice. Definizione di applicazione lineare. Esempi: l'applicazione nulla, l'identità, la trasposizione di matrici.
Immagine del vettore **0,** nucleo di un'applicazione. Un'applicazione lineare da uno spazio di dimensione finita è completamente individuata dalle immagini dei vettori di una base. Immagine di un'applicazione lineare. Caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive.
Il teorema delle dimensioni e i suoi corollari. Definizione di rango di una matrice come dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare associata. Teorema di Rouché-Capelli.
Il metodo di eliminazione di Gauss per un sistema di $m$ equazioni in $n$ incognite. Il rango di una matrice è uguale al numero dei pivot di una sua qualunque riduzione a scalini. Uso del rango di una matrice per calcolare dimensioni di sottospazi. Equazioni parametriche e equazioni cartesiane di sottospazi vettoriali e di sottospazi affini.

**5. Applicazioni lineari e matrici.**
Lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali. Spazio duale. La composizione di applicazioni lineari è lineare. Endomorfismi. Applicazioni invertibili. L'inversa di un'applicazione lineare è lineare. Isomorfismi. Ogni spazio vettoriale reale di dimensione $n$ è isomorfo a $\mathbb{R}^n$; lo spazio delle matrici $m$ per $n$ è isomorfo allo spazio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$; lo spazio $\mathbb{R}^n$ è isomorfo al suo duale. Composizioni di applicazioni lineari e prodotto righe per colonne, proprietà del prodotto, proprietà delle matrici invertibili. Condizioni necessarie e sufficienti perché una matrice sia invertibile. Calcolo della matrice inversa di una matrice non singolare, attraverso la soluzioni simultanea di $n$ sistemi lineari.
Rango per righe di una matrice; il rango per righe è uguale al rango (per colonne).
Matrice del cambiamento di base. Matrice associata ad un'applicazione lineare tra due spazi di dimensione finita. L'isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari e quello delle matrici dipende dalla scelta delle basi. Matrici simili. Classe di similitudine di una matrice.

**6. Determinanti.**
Condizione perché una matrice di ordine 2 sia invertibile, determinante di una matrice di ordine 2. Interpretazione del determinante di una matrice di ordine 2 come area, con segno, di un parallelogramma.

Definizione del determinante come funzione delle righe di una matrice di ordine n, che gode di quattro proprietà. Alcune conseguenze delle condizioni della definizione: alternanza, relazione tra il determinante di una matrice e quello di una sua riduzione a scalini, determinante di una matrice diagonale, il determinante di una matrice a scalini è il prodotto dei pivot. Il determinante di una matrice è 0 se e solo se le righe sono linearmente dipendenti. Minori. Definizione ricorsiva di una funzione "det". Senza dimostrazione: teorema di esistenza ed unicità del determinante, sviluppi di Laplace, determinante della matrice trasposta, teorema di Binet. Conseguenze del teorema di Binet: una matrice invertibile ha determinante diverso da 0, il teorema di Cramer (senza dimostrazione), la relazione tra determinanti di matrici simili, il teorema degli orlati.

**7. Geometria affine dello spazio.**
Equazioni di piani e di rette nello spazio. Condizione di parallelismo tra piani. Giacitura di un piano, vettore direttore di una retta. Stella di piani, stella di rette. Fascio di rette in un piano. Fascio dei piani per una retta.
Equazione del piano per tre punti non allineati sotto forma di determinante. Condizioni di allineamento, di complanarità.
Condizioni di parallelismo tra rette, tra rette e piani; rette sghembe, condizioni perché due rette siano sghembe. Sistemi di coordinate affini, cambiamenti di coordinate affini. Sistemi di coordinate concordemente orientati (equiversi).

**8. Geometria euclidea dello spazio.**
Coseno dell'angolo convesso tra due vettori nel piano, prodotto scalare nel piano. Il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. Spazi con prodotti scalari, esempio di un prodotto scalare non definito positivo (in $\mathbb{R}^4$), spazi vettoriali metrici, distanza, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e coseno dell'angolo di due vettori. Basi ortogonali, basi ortonormali. La disuguaglianza triangolare. Il procedimento di Gram-Schmidt, esistenza di basi ortonormali, proiezioni ortogonali, supplemento ortogonale di un sottospazio.
Isometrie e matrici ortogonali. Matrici ortogonali di ordine 2 e isometrie di $\mathbb{R}^2$.

**9. Autovettori e autovalori.**
Autovettori e autovalori di un endomorfismo. Autospazi. Basi di autovettori, endomorfismi diagonalizzabili. Il polinomio caratteristico, indipendenza del polinomio caratteristico dalla base. L'esistenza di autovalori dipende dal tipo di campo dei coefficienti.
Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Se un endomorfismo di uno spazio di dimensione n possiede n autovalori distinti è diagonalizzabile. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica; la prima non è inferiore alla seconda. Criterio di diagonalizzabilità.

**10. Coniche e quadriche.**
Equazioni di luoghi di punti nel piano: punti equidistanti da due punti dati, punti le cui distanze da due punti dati hanno somma costante, o differenza costante, punti equidistanti da un punto e da una retta. Assi di simmetria di ellissi, iperboli, parabole. Definizione unitaria dei tre tipi di curva attraverso l'eccentricità. Equazioni parametriche di ellisse, parabola, iperbole.
Curve di secondo ordine nel piano affine reale. Posizioni reciproche di rette e curve del secondo ordine: rette asintotiche, secanti, tangenti, esterne. Curve non singolari**.** Invarianti affini e invarianti metrici delle curve di secondo ordine. Il teorema spettrale (senza dimostrazione), suo uso nella classificazione delle coniche. Classificazione metrica e classificazione affine delle coniche. Centro, assi, asintoti. Cenni alla classificazione metrica delle quadriche, sezioni di una quadrica con un piano. Sfere, cilindri, coni, quadriche rigate. Coordinate polari, coordinate cilindriche, coordinate sferiche, equazioni parametriche di sfere, di coni e di cilindri.

**Testi.**
Il testo di riferimento principale è

> Marco Abate – Chiara de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare,* McGraw-Hill, Milano, **seconda edizione**, 2010.

In http://elea.linguistica.unical.it/moodle/ sono reperibili esercizi, quiz e informazioni sul corso.