Matrici invertibili, cambiamenti di base.

1. Verificare che le matrici $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sono di rango massimo, e calcolare le loro inverse.
2. Si supponga che, per una data matrice quadrata **A,** esista una matrice **B** per cui sia **AB = I** ed esista una matrice **C** per la quale sia **CA = I** . Dimostrare che **A** è invertibile.
3. Si è visto che, se una matrice quadrata **A** è di rango massimo, è possibile risolvere in modo unico il sistema (nella matrice incognita **X**) **AX = I;** infatti, utilizzando l'algoritmo di Gauss, si costruisce una matrice **B** tale che sia **AB = I**. Come si può provare che è anche **BA = I ?**
4. Trovare per quali valori del parametro k la matrice $\begin{pmatrix} k & 1-k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ sia invertibile e, per quei valori di k, calcolare la matrice inversa.
5. Stabilire se esistano delle scelte del parametro h per le quali la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & h & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
risulti non invertibile; per quel valore di h, indicare delle colonne di **A** linearmente indipendenti ed esprimere le restanti come combinazione lineare di quelle.
6. Verificare che le due famiglie di vettori $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ costituiscono due basi per lo spazio $\mathbb{R}^2$; trovare le matrici dei cambiamento di base
   a) dalla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ alla base $\mathcal{B}$
   b) dalla $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$
   e trovare le componenti del vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ ed alla $\mathcal{B}'$.
7. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; scrivere la matrice del cambiamento di base dalla base canonica a $\mathcal{B}$.
8. Sia F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix}$. Trovare la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
9. Sia F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y \\ y \end{pmatrix}$. Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ per $\mathbb{R}^2$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ per $\mathbb{R}^3$.