Geometria analitica e algebra lineare - 11 febbraio 2010

Nome e cognome ______________________________ n. matricola__________

Scrivere nome e cognome **<u>in testa ad ogni foglio</u>. Consegnare questo foglio.** La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali.
<u>Motivare ogni risposta. Le risposte prive di spiegazioni non vengono prese in considerazione.</u>

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono assegnati i punti $A=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$ e la retta *r* di equazioni cartesiane $\begin{cases}x+y+z=-2\\x+2z=-4\end{cases}$. a. Trovare delle equazioni cartesiane della retta *AB.*
b. Stabilire quanti siano i piani, paralleli alla retta *r*, che passano per *A*, *B,* e scriverne un'equazione cartesiana.
c. Rappresentare, con equazioni cartesiane, la retta che è la proiezione ortogonale di *r* sul piano *z* = 0.

(punti 2 + 3 + 2)

2.a) Spiegare perché l'insieme dei punti dello spazio, le cui coordinate sono date, al variare del parametro reale θ, da $\begin{cases}x=-2+2\cos\theta\\y=2+4\sin\theta\\z=-2\end{cases}$, sia una curva C; descrivere brevemente C e determinarne delle equazioni cartesiane.

b) Per ogni punto $P \in C$, sia r_P la retta che passa per *P* ed è parallela all'asse delle *z*; scrivere delle equazioni parametriche di r_P e un'equazione cartesiana del cilindro che ha queste rette come generatrici.

(punti 3 + 2)

3. Determinare un'equazione cartesiana della sfera *S* con centro in $C=\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$ che è tangente al piano *z* = –2 e trovare le coordinate del punto di contatto tra la sfera *S* ed il piano *z* = –2.

(punti 2 + 2)

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è assegnato il sottospazio $\mathbf{U}=Span\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3/2\\0\\-6\end{pmatrix}\right\}$. Determinare un sottospazio **V** in modo che sia $\mathbb{R}^4 = \mathbf{U}\oplus\mathbf{V}$ **.**

(punti 4)

5. Sia L_M: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\2&2&3\\1&-4&-1\end{pmatrix}$. Determinare per quali valori della coordinata β il vettore $\begin{pmatrix}-2\\\beta\\1\end{pmatrix}$ abbia controimmagini in L_M e determinare tali controimmagini.

(punti 4)

6. Siano $L_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari che, rispetto alla base canonica, sono rappresentate dalle matrici $\mathbf{A}_h=\begin{pmatrix}-2&1&h\\0&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}, h\in\mathbb{R}$. Per quali valori di *h* la corrispondente $\mathbf{A}_h$ è diagonalizzabile? Per quei valori, trovare un cambiamento di base che riduca la matrice in forma diagonale.

(punti 3+3)