Determinanti. **Uso dei determinanti in geometria analitica.**

1. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici, utilizzando quando possibile le proprietà dei determinanti per accorciare il procedimento:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&3\\0&-2&-2\end{pmatrix};\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&1&3\\3&4&67\\0&1&4\end{pmatrix};\mathbf{D}=\begin{pmatrix}11&4&0&2\\0&9&1&\pi\\0&1&0&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{I}_4=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad \mathbf{K}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&5\\\sin\alpha&0&-\cos\alpha\end{pmatrix};\quad \mathbf{L}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\4&-3&1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}4&3&5&23\\0&4&6&43\\0&0&-1&56\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&0\\-2&3&9&0\\44&5&6&7\end{pmatrix};\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&22&-2&2\\44&55&-11&11\end{pmatrix}.$$

2. Usare le proprietà dei determinanti per dimostrare che è

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&....&10\\11&12&13&....&20\\21&22&23&....&30\\...&...&...&...&...\\91&92&93&...&100\end{pmatrix}=0.$$

3. E' vero o falso che det(**A** + **B**) = det(**A)** + det(**B)** ? Motivare la risposta!

4. Usare le proprietà dei determinanti per verificare che, se i vettori $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti,

posto

$$\mathbf{v}=\left(\det\begin{pmatrix}b&c\\b'&c'\end{pmatrix},-\det\begin{pmatrix}a&c\\a'&c'\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}a&b\\a'&b'\end{pmatrix}\right),$$

allora per ogni numero reale k, il vettore $k\mathbf{v}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases}ax+by+cz=0\\a'x+b'y+c'z=0\end{cases}.$$

Suggerimento: sostituendo le componenti di **v** nel primo membro di ciascuna equazione si ottiene lo sviluppo di un determinante; perché quel determinante vale 0?

5. Utilizzare l'esercizio precedente per trovare dei parametri direttori della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases}2x+y-z=2\\-x+y+z=1\end{cases}.$$

6. Scrivere sotto forma di determinante:
- la condizione di parallelismo per due rette, assegnate nel piano tramite le loro equazioni cartesiane
- la condizione che devono soddisfare i coefficienti delle equazioni di tre rette nel piano perché le rette appartengano ad uno stesso fascio.

7. Usare dei determinanti per:

a) stabilire se esista qualche scelta dell'elemento h per cui la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & h \end{pmatrix}$ sia invertibile,

b) trovare per qual valore di k i tre vettori (2,12,k), (4,0,1), (3,2,0) sono linearmente dipendenti.

8. Nel piano, riferito a coordinate coordinate cartesiane $(O,\vec{i},\vec{j})$, sono assegnati i punti $A=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Scrivere sotto forma di determinante l'equazione cartesiana della retta che li congiunge.

9. Nello spazio è assegnato un sistema di coordinate affini (O,**i**,**j**,**k**). Si considerino i punti $R=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Usare dei determinanti per scrivere un'equazione del piano passante per R,S,T.

10. Usare dei determinanti per scrivere un'equazione del piano che passa per (1,0,3) ed è parallelo alle rette di equazioni parametriche, rispettivamente nei parametri reali t ,s, $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=-t \end{cases}, \begin{cases} x=1, \\ y=s \\ z=2-s \end{cases}$.

11. Usare le proprietà dei determinanti per dimostrare che la condizione di allineamento di tre punti A,B,C nel piano è

$$\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Suggerimento: il determinante non cambia se ad una riga si sottrae un'altra.

12. Per analogia con l'esercizio precedente, quale determinante del quarto ordine si può utilizzare per esprimere la condizione di complanarità di quattro punti dello spazio?

13. Usare l'esercizio precedente per verificare che i punti

$$R=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

non sono complanari (utilizzare proprietà dei determinanti per semplificare i calcoli); scrivere sotto forma di determinante un'equazione cartesiana del piano di S,T,W.

14. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con **U** il sottospazio generato da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e con **V** il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Usare dei determinanti per trovare il sottospazio intersezione $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$.

15. Usare le proprietà dei determinanti per verificare la seguente identità (che riguarda il "determinante di Vandermonde" di ordine 3)

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} = (x-y)(y-z)(x-z) \quad .$$

16. Dimostrare che una matrice è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da 0.