Geometria analitica e algebra lineare - 12 luglio 2010

Nome e cognome ______________________________ n. matricola________________

Scrivere nome e cognome **<u>in testa ad ogni foglio</u>. Consegnare questo foglio.** La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. Motivare le risposte: ***<u>risultati privi di spiegazioni NON sono considerati validi.</u>***

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali *Oxyz*, sono assegnati il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta *r* di equazioni cartesiane $\begin{cases} z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

   a. Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane della retta che contiene *P* ed è parallela ad *r*.
   b. Scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per *r* e per *P*.
   c. Scrivere un'equazione cartesiana del piano per *P* che è parallelo sia all'asse delle *y* sia alla retta *r*.

(punti: 2, 2, 2)

2. Quante sono le sfere di raggio uguale a 1 che sono tangenti al piano $x + y = 1$ nel punto $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? Scrivere le loro equazioni cartesiane.

(punti: 2+1)

3. Sia **A** una matrice di tipo (n,m), ed **S** una sua riduzione a scala. Per ciascuna delle affermazioni che seguono, spiegare per quali ragioni si ritiene che sia vera oppure, se la si ritiene falsa, mostrare un contro-esempio:

   a) lo spazio vettoriale generato dai vettori riga di A coincide con lo spazio generato dai vettori riga di S
   b) lo spazio vettoriale generato dai vettori colonna di A coincide con lo spazio generato dai vettori colonna di S
   c) la dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori colonna di **A** coincide con la dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori colonna di **S**.

(punti: 6)

4. Fissato un intero positivo *n*, sia $P_n[x]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi in un'indeterminata, a coefficienti reali, di grado minore o uguale a *n*, e sia $\varphi : P_n[x] \to \mathbb{R}$ l'applicazione così definita:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \mapsto a_0 .$$

Stabilire se φ sia un'applicazione lineare, se sia iniettiva, se sia surgettiva.
Nel caso che φ sia un'applicazione lineare, scegliere una base in ciascuno dei due spazi e trovare la matrice che la rappresenta rispetto a quelle basi.

(punti 4)

5. Determinare i valori dell'elemento *h* nella matrice $\mathbf{A}(h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ per i quali il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ammette controimmagini nell'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che è associata a **A**(*h*), rispetto alle basi canoniche, e, per quei valori per cui è possibile, determinare tutte le controimmagini di **v.**

(punti 3)

6. a. Studiare la conica di equazione $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 1 = 0$, determinandone, se possibile, centro, assi, asintoti e indicando un cambiamento di coordinate che porti l'equazione alla forma canonica.
b. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane *Oxyz*, è data la quadrica di equazione $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 1 = 0$.
Studiare le sue sezioni con i piani paralleli ai piani coordinati; dedurre da questo studio di che tipo di quadrica si tratti.

(punti: 5 + 3)