Uso del prodotto scalare: condizioni di perpendicolarità, angoli, distanze.

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, dotato del prodotto scalare standard, è assegnato il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Determinare le componenti di tutti i vettori perpendicolari a **v.**
2. Verificare che Span{**v**} contiene due versori**, e** determinare le componenti dei due versori.
3. Sia ***a*** un vettore fissato in $\mathbb{R}^2$. Descrivere l'insieme di tutti i vettori ***v*** per cui è <***a,v***> = 0.
4. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a **v** passante per $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e della retta perpendicolare a **v** passante per *P*.
5. Quale condizione devono soddisfare i coefficienti *a, b, a', b'* affinché le rette rappresentate dalle equazioni $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ siano tra loro perpendicolari?
6. Nel fascio delle rette che passano per $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ determinare la retta perpendicolare alla retta di equazione $2x + 5y = 1$.
7. Trovare i versori paralleli alle rette *r*, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$, ed *r'*, di equazione cartesiana $x + 6y + 2 = 0$, entrambe orientate nel verso delle *y* crescenti; utilizzare tali versori per calcolare il coseno dell'angolo tra le due rette orientate.
8. Scegliere l'orientamento delle rette di equazioni, rispettivamente, $x + y + 33 = 0$, $3x - y = 0$ in modo che risulti acuto l'angolo tra le due rette così orientate; calcolare i coseni direttori delle rette così orientate ed il coseno dell'angolo tra di esse.
9. Calcolare gli angoli tra le rette $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$, $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$.
10. Fissato il punto $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ trovare le coordinate di:
    a. il punto simmetrico di *P* rispetto alla retta di equazione $y = 0$
    b. il punto simmetrico di *P* rispetto alla retta $x = 6$
    c. il punto simmetrico di *P* rispetto al punto $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
    d. il punto simmetrico di *P* rispetto alla retta $y = x$
    e. il punto simmetrico di *P* rispetto alla retta $x + y = 1$.
11. Verificare che l'insieme dei punti che sono equidistanti dai due punti $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ è una retta (asse del segmento *PR*) che è perpendicolare al segmento *PR* nel suo punto medio; verificare, per due punti generici *A, B,* che il luogo dei punti equidistanti da due punti dati *A, B* è la perpendicolare alla segmento *AB* nel suo punto medio (asse del segmento),
12. Calcolare la distanza tra le rette *s*, di equazione $-3x + 4y - 1 = 0$, ed *s'*, di equazione $12x - 16y = 0$.

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare standard, è assegnato il vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

13. Determinare le componenti di tutti i vettori perpendicolari a **w.**
14. Verificare che il sottospazio Span{**w**} contiene due versori, determinandone le componenti.
15. Determinare i coseni direttori della retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$, orientata nel verso delle *x* crescenti.

16. Calcolare il coseno dell'angolo tra la retta r di equazioni (nel parametro t) $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$, orientata secondo il parametro t crescente, e la retta s di equazioni (nel parametro τ) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \tau \\ z = 3 - 2\tau \end{cases}$, orientata nel verso delle y crescenti.
17. Calcolare il vettore che è la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sulla retta s di equazioni, nel parametro τ, $\begin{cases} x = 1 \\ y = \tau \\ z = 3 - 2\tau \end{cases}$, orientata nel verso delle z crescenti.
18. Quanti sono i vettori ortogonali ad $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$? Scrivere le loro componenti. Tra i vettori ortogonali a **u,** determinare quelli che formano un angolo di $\pi/4$ con $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
19. Sia $\boldsymbol{a}$ un vettore fissato in $\mathbb{R}^3$. Descrivere l'insieme di tutti i vettori $\boldsymbol{v}$ per cui è $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{v} \rangle = 0$.
20. Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per l'origine perpendicolare al vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
21. Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ e perpendicolare alla retta di equazioni $x = y = z/2$.
22. Trovare il punto che è la proiezione ortogonale di $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ sul piano π di equazione $x + y + 2z = 1$; calcolare la distanza di P da π.
23. Verificare che tutti i piani che sono ortogonali al piano di equazione $x + 2y - z = 5$ nel punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ formano un fascio di piani.
24. Calcolare il coseno dell'angolo tra i piani $x + y = 1$, $3x + z = 2$, orientati in modo che l'origine si trovi nei semispazi determinati dai versori normale scelti .
25. Come si esprime, usando il prodotto scalare, la condizione perché il piano $ax + by + cz + d = 0$ sia parallelo alla retta di parametri direttori (l,m,n) ?
26. Tra tutti i piani che contengono la retta di equazioni cartesiane $x = y + 1 = z/2$ trovare quello che è parallelo alla retta $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$.
27. Trovare delle equazioni che rappresentino la retta che è la proiezione ortogonale della retta $x = y = z$ sul piano $x = 0$.
28. Rappresentare con equazioni cartesiane la retta proiezione ortogonale dell'asse delle y sul piano di equazione $x + y + z = 1$.
29. Esiste qualche retta perpendicolare a due piani distinti?
30. Trovare il piano che contiene la retta $x + 2 = 2y + 3 = z$ ed è parallelo all'asse delle z.