

Usi del prodotto scalare e del prodotto vettore: distanze, aree e volumi.

1. Sono assegnati nello spazio un punto Q e un vettore \mathbf{n} ; quale sottoinsieme formano i punti X dello spazio che soddisfano l'equazione $\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OQ} \rangle = 0$? Quale sottoinsieme è individuato dalla disequazione $\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OQ} \rangle > 0$?
2. Utilizzando dei prodotti scalari e l'osservazione precedente, dimostrare che la distanza di $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dal piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
3. Come si esprime la distanza di un punto P_0 del piano dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$? (*Ragionare per analogia con il caso dello spazio*).
4. (Dalla *prova scritta dell'esame di Geometria analitica* del 15 aprile 2009). Nello spazio è assegnato il piano π , di equazione $x + 2y - z = 0$. Rappresentare con equazioni cartesiane l'insieme dei punti la cui distanza da π è uguale a 1.
5. Ricordando una caratterizzazione geometrica delle bisettrici degli angoli di due rette, trovare le bisettrici delle rette di equazioni $x + 5y + 3 = 0, 3x - 4y = 0$.
6. Su un foglio quadrettato, disegnare un sistema di assi cartesiani e rappresentarvi il sottoinsieme S definito dalla disequazione $x + 5y + 3 > 0$. Se si orienta la retta di equazione $x + 5y + 3 = 0$ in modo che il suo versore normale orientato ⁽¹⁾ giaccia in S , quali sono i coseni direttori della retta?
7. Su un foglio quadrettato, disegnare un sistema di assi cartesiani e rappresentarvi le rette di equazioni, rispettivamente, $x + y + 3 = 0, 3x - 4y = 0$. Rappresentare con un sistema di disequazioni l'angolo che ha i lati su queste rette e che contiene il punto di coordinate $(0,1)$.
8. Quale regione piana è rappresentata dalla disequazione $(x + 2y + 2)(x - 3) < 0$?
9. Verificare che il punto $L = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ non appartiene alla retta l di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}$ e trovare la distanza di L da l .
10. Verificare che le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente, $\begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}, x = y = z - 1$ sono sghembe. Scrivere un'equazione del piano che contiene la prima retta ed è parallelo alla seconda; calcolare la distanza tra le due rette.
11. Verificare che le rette di equazioni $x = y = z - 1$, $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2x - y - z - 4 = 0 \end{cases}$ non sono incidenti, e calcolare la loro distanza.
12. Calcolare l'area del parallelogramma che ha come vertici consecutivi i punti del piano $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
13. (Dalla *prova d'esame di Geometria analitica* del 18 settembre 2009). Calcolare **in due modi diversi** l'area del triangolo che ha come vertici i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
14. Verificare che il prodotto misto di tre vettori $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle$ è uguale al determinante della matrice $(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$.
15. Nello spazio, si consideri il parallelepipedo che è determinato dai tre spigoli con un estremo nell'origine e gli altri nei punti $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; calcolare il suo volume.

¹ Nel piano, data una retta r orientata, esiste un solo versore \mathbf{n} ortogonale ad r , per il quale l'angolo retto da $\text{vers}(r)$ a \mathbf{n} sia percorso in senso antiorario; si dice in tal caso che il versore normale è stato orientato in conseguenza dell'orientazione della retta.