Sottospazi ortogonali, basi ortogonali, isometrie.

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale (euclideo), si consideri il sottospazio **U** generato dai vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a. Determinare il sottospazio $\mathbf{U}^{\perp}$ dei vettori che sono ortogonali a tutti i vettori di **U;**
   b. trovare una base ortogonale (cioè tale che i suoi elementi siano vettori a due a due ortogonali) $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ in **U,** $\mathbf{u}_3$ in $\mathbf{U}^{\perp}$**.**
2. Nello spazio $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio **V** generato dai vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   a. Determinare e studiare l'insieme $\mathbf{V}^{\perp}$ dei vettori che sono ortogonali a tutti i vettori di **V.**
   b. E' vero o falso che è $\mathbb{R}^4 = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^{\perp}$?
   c. Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ formata da vettori di **V** e $\mathbf{V}^{\perp}$**.**
3. Quante sono le basi ortogonali e formate da versori (ortonormali) di $\mathbb{R}^2$ si possono costruire prendendo come primo elemento il versore $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$? Scrivere le matrici del cambiamento di base dalla base standard alle basi così trovate e calcolarne i determinanti. Che cosa si nota?
4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare, trovare una base ortonormale $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ con $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ e tale che sia $\mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ e che la matrice del cambiamento di base abbia determinante positivo.
5. In $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare standard, è assegnata una base ortonormale B. Sia **M** la matrice del cambiamento di base, dalla base standard a B. Dimostrare che è $\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$ (**M** è una matrice *ortogonale*)**.**
6. Quali sono le matrici ortogonali di ordine 2?
7. Sia **M** una matrice ortogonale di ordine *n*. Verificare che l'applicazione lineare $L_{\mathbf{M}}$ di $\mathbb{R}^n$ (dotato del prodotto scalare standard) in se stesso, associata alla matrice **M,** è un isomorfismo che *conserva le norme* (una *isometria*), cioè è tale che per ogni vettore **v** si abbia
$$\|\mathbf{v}\| = \|L_{\mathbf{M}}(\mathbf{v})\|.$$
8. Per ciascuna delle isometrie di $\mathbb{R}^2$ associate alle matrici
$$i)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; ii)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; iii)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; iv)\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt[2]{3}/2 \\ \sqrt[2]{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
trovare le immagini dei vettori $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Individuare, per ciascuna isometria, se esistono dei vettori che restano fissi, cioè che hanno come corrispondenti se stessi.
9. Stabilire se vi siano vettori che rimangano fissi nell'isometria di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; determinare le immagini dei sottospazi $\mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1\}$, $\mathrm{Span}\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$.