Punti fissi; autovettori.

1. Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, si consideri l'affinità φ così definita
$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 \\ 2y-2 \end{pmatrix}.$$
Verificare che φ tiene unito un punto C , applica su se stessa ogni retta per C ed applica una qualunque retta non passante per C in una retta parallela ad essa.

2. Verificare, trovandone i punti fissi, che l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$
è un riflessione.

3. Usando la definizione di riflessione rispetto ad una retta, oppure utilizzando dei cambiamenti di base, trovare le relazioni tra le coordinate (a,b) di un punto P del piano e le coordinate (a',b') del punto P' che è l'immagine di P nella riflessione rispetto alla retta di equazione $y = 5x$.

4. Determinare la matrice ortogonale (del terzo ordine) della riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano di equazione $x - y = 0$.

5. Trovare la matrice, ortogonale di ordine 3, della rotazione di 45° intorno alla retta $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

6. Determinare, se esistono, gli autovalori e gli autospazi delle matrici reali
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare gli autovalori e gli autospazi delle matrice **M** dell'esercizio 2, e delle matrici delle seguenti isometrie
$$i)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; ii)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{S}_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \mathbf{R}_{y,\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Trovare autovalori e autovettori delle matrici
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. In base ai risultati ottenuti per gli esercizi 6, 7, 8, indicare quali tra le matrici di quegli esercizi siano diagonalizzabili e, per ciascuna di quelle, trovare un cambiamento di base che la porti in forma diagonale.

10. Trovare una matrice del secondo ordine per la quale che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sia un autovettore associato all'autovalore 3 e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia associato all'autovalore 5.