Diagonalizzazione di matrici simmetriche. Studio di coniche.

1. Scegliere delle basi ortonormali in $\mathbb{R}^2$ in modo che rispetto a tali basi le applicazioni associate a ciascuna delle matrici simmetriche

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

siano in forma diagonale.

2. Scegliere delle basi ortonormali in $\mathbb{R}^3$ in modo che in tali basi siano in forma diagonale le applicazioni associate alle matrici simmetriche

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Studiare, determinandone gli eventuali centro, assi, asintoti, le coniche

$$\begin{aligned} &a)\ 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 1 = 0 \\ &b)\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x = 0 \\ &c)\ x^2 - 4xy + 3y^2 - 6y - 1 = 0 \\ &d)\ 3x^2 - 8xy - 3y^2 - 1 = 0 \\ &e)\ x^2 + y - 8x + 4y + 20 = 0 \end{aligned}.$$

Per ciascuna conica, indicare un cambiamento di coordinate che porti l'equazione in forma canonica e scrivere la forma canonica.

4. Nel piano sono assegnati un punto F ed una retta d, che non contiene F. Scegliendo il sistema di riferimento ,cartesiano ortogonale, in modo che F abbia le coordinate $(c,0)$ e la retta d abbia equazione $x + c = 0$, dimostrare che il luogo dei punti del piano per i quali le distanze da F e da d siano nel rapporto e, costante, è una ellisse, una parabola, una iperbole a seconda che e sia minore, uguale o maggiore di 1.

5. Su un foglio di carta quadrettata, tracciare uno schizzo approssimativo, segnando fuochi, vertici, assi, eventuali asintoti, delle coniche di equazioni (*non occorre calcolare determinanti!*):

a) $4x^2 + 25(y-1)^2 = 100$; b) $xy = 6$; c) $y^2 + 4x^2 = 0$; d) $y^2 - 4(x-1) = 0$; e) $(y+x)^2 - 4(x-y)^2 = 1$.

6. Scrivere un'equazione cartesiana dell'ellisse che ha un fuoco nell'origine delle coordinate, l'altro in (2,2) e il cui asse traverso ha lunghezza $2a = 8$. Rappresentare la stessa ellisse in forma canonica (riferita ai suoi assi).

7. Scrivere un'equazione della parabola che ha come direttrice la retta $x = y$ ed il fuoco nel punto $(0, -1)$. Qual è il vertice di questa parabola?

8. Stabilire il tipo (ellisse, parabola, iperbole) delle coniche della famiglia rappresentata dalla equazione, dipendente dal paramento k, $(x-k)^2 - 9(y-2k^2)^2 - 36 = 0$; determinare e studiare la curva luogo dei centri delle coniche della famiglia.

9. Scrivere delle equazioni parametriche per le coniche di equazioni

$$(x-2)^2 + 9(y+2)^2 - 36 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0, \qquad 4x + y^2 = 0.$$

10. Trovare un'equazione cartesiana per ciascuna delle curve rappresentate dalle equazioni parametriche

a) $x = t,\ y = \dfrac{t}{t+1}$,

b) $y = 2 + t,\ x = 1 + t^2$

e studiare brevemente queste curve.

11. Sia $\alpha > \beta > 0$. Studiare, al variare di k, le coniche della famiglia $\dfrac{x^2}{k+\alpha} + \dfrac{y^2}{k+\beta} = 1$ verificando che esse hanno tutte gli stessi fuochi.

12. Stabilire se le equazioni che seguono rappresentano delle circonferenze e, in caso affermativo, trovare i relativi centri e raggi

$$a)\ x^2+y^2+2x+1=0;\ b)\ x^2+y^2+x+1=0;\ c)\ 4x^2+4y^2+2x-1=0.$$

13. Stabilire quale tra i punti P = (4,−3), Q = (−3,−1), R = (−3/2,−3/2) è interno e quale appartiene alla circonferenza $x^2+y^2+4x+2y+4=0$.

14. Se esiste una circonferenza che passi per i punti L = (−1,−1), M = (0,−8) e per l'origine O = (0,0), trovarne il centro, il raggio, un'equazione, e la retta tangente nell'origine.

15. Trovare un'equazione della circonferenza che passa per A = (2,4) ed è tangente in B = (−2,−1) alla retta di equazione $x-2y=0$.

16. Sia $\mathfrak{F}$ la famiglia di tutte le circonferenze che passano sia per B = (−2,−1) che per C = (0,1).

a. Scrivere una equazione che rappresenti le circonferenze di $\mathfrak{F}$.
b. Verificare che le circonferenze di $\mathfrak{F}$ hanno i centri su una stessa retta: quale?
c. E' giustificabile il nome di "fascio" per la famiglia $\mathfrak{F}$ (a patto di includere tra le circonferenze anche le rette)?
d. Quante e quali sono le circonferenze di $\mathfrak{F}$ che sono tangenti alla retta di equazione $x = 1$?
e. Quante e quali sono le circonferenze di $\mathfrak{F}$ che sono tangenti in C alla retta $x + y = 1$?

17. a) Scrivere un'equazione per rappresentare la famiglia $\mathfrak{F}$ di tutte le circonferenze che sono tangenti nel punto A = (2,4) alla retta $x - y + 2 = 0$.

b) Se si allarga la definizione di circonferenza, includendo tra le circonferenze anche le rette, la famiglia $\mathfrak{F}$ può essere chiamata "fascio"?

c) Scrivere le equazioni delle circonferenze della famiglia $\mathfrak{F}$ che hanno raggio uguale ad 1.

d) Esiste una circonferenza di $\mathfrak{F}$ che passi per C = (0,1)? In caso positivo, determinarne il centro e il raggio.

18. Determinare centro, raggio ed un'equazione della circonferenza che passa per A = (2,4), per C = (0,1) ed ha il centro sull'asse delle x.

19. Fra tutte le circonferenze che hanno il centro nel punto A = (2,4), ne esiste una che è tangente alla retta di equazione $3x = y$; trovare il suo raggio, il punto di contatto tra la circonferenza e la tangente, e scrivere un'equazione della circonferenza trovata.

20. Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, dimostrare che il luogo dei punti medi delle intersezioni di una parabola con le rette per il suo vertice è ancora una parabola.

21. Per ogni punto A sull'asse delle x sia A' il punto che è simmetrico di A rispetto a U = (1,0). Siano: r la retta congiungente A con (0,1), r' la retta per A' e per (0,–1), P il punto comune a r e r'. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del luogo L descritto da P al variare di A sull'asse delle x. Studiare L.

22. (*Dalla prova scritta del* 10 luglio 2006). Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche dell'ellisse E che ha come fuochi i punti O = (0,0) e Q = (8,0) e ha un vertice nel punto R = (−4,0). Trovare gli altri tre vertici di E.

23. Trovare un'equazione polare per l'ellisse di eccentricità 1/4, con un fuoco a distanza 2 dalla relativa direttrice.

24. Quale curva è rappresentata dall'equazione polare $\rho = \cos\vartheta$?

25. Descrivere la curva di equazione polare $\rho = \dfrac{1}{1+2\cos\vartheta}$.